Резонансы оператора Лапласа в волноводе с возмущёнными краевыми условиями

Головина Анастасия Михайловна

к.ф.-м.н.

Факультет ФН, кафедра математического моделирования, МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: nastya_gm@mail.ru

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты в пространстве $\mathbb{R}^2$, а Π – горизонтальная полоса шириной π, то есть $\Pi := \{x : 0 < x_2 < \pi\}$. На нижней границе полосы имеются два сегмента длины ℓ_+ и ℓ_-, расстояние между которыми $2a$. Данные сегменты обозначим символами $\gamma_+ = \{x : a < x_1 < a + \ell_+,\ x_2 = 0\}$ и $\gamma_- = \{x : -a - \ell_- < x_1 < -a,\ x_2 = 0\}$ соответственно. Оставшуюся часть нижней границы полосы будем обозначать Γ, а всю верхнюю границу – γ (см. рисунок 1). Рассматривается краевая задача

$$(-\Delta - \lambda)\, u = 0, \quad u|_{\gamma_\pm} = 0, \quad u|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\lambda = \frac{1}{4} + k^2 \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $k \in \mathbb{C}$, $u \in W_{2,loc}(\Pi)$ и на бесконечности имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= C_+ e^{i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x_1} \cos\frac{x_2}{2} + O(e^{-\mathrm{Re}\sqrt{\frac{9}{4}-\lambda}x_1}) \quad \text{при } x_1 \to +\infty, \\ u(x) &= C_- e^{-i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}x_1} \cos\frac{x_2}{2} + O(e^{\mathrm{Re}\sqrt{\frac{9}{4}-\lambda}x_1}) \quad \text{при } x_1 \to -\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

где $C_\pm$ – некоторые константы, не зависящие от u. Здесь и во всех последующих вспомогательных задачах выбор ветви корня фиксируется равенством $\sqrt{1} = 1$. Основным объектом изучения являются резонансы задачи (1), (2) в окрестности отрезка $[\frac{1}{4}; 1]$ при стремлении к бесконечности длин сегментов ℓ_+ и ℓ_-. Под резонансом здесь понимаются такие значения λ, при которых задача (1), (2) имеет нетривиальное решение.

Для формулировки основного результата нам понадобится вспомогательная задача, которая рассматривается в этой же области Π. Отличие её состоит в том, что граница области разбивается подругому. На нижней части границы области Π задаётся сегмент длины $2a$. Обозначим данный сегмент $\Gamma_a : \{x : |x_1| < a, x_2 = 0\}$. Оставшуюся часть нижней границы будем обозначать γ_a, а верхнюю границу области – γ (см. рисунок 2).

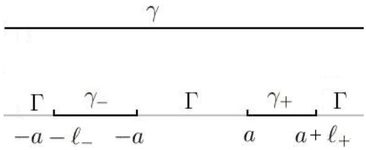

рис. 1. Возмущённая задача

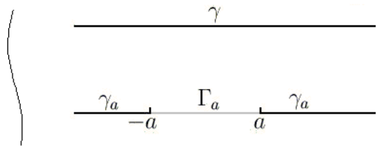

рис. 2. Вспомогательная задача

Рассматривается задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_{\gamma} = 0, \quad \psi|_{\gamma_a} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bigg|_{\Gamma_a} = 0, \tag{3}$$

где $u \in W^2_{2,loc}(\Pi)$. В работе [1] было доказано, что для рассматриваемой в области Π задачи (3), существует конечное число собственных значений $\lambda_n = \frac{1}{4} + k_n^2$ и соответствующих им собственных функций ψ_n, которые в зависимости от n являются либо чётными, либо нечётными. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *В окрестности каждой из точек λ_n для каждого λ_n задача (1), (2) имеет резонанс, который сходится к соответствующей точке λ_n при $\ell_\pm \to +\infty$. Каждому из резонансов соответствует только одна собственная функция в точности совпадающая с собственными функциями ψ_n вспомогательной задачи (3). Асимптотика резонанса задачи (1), (2) имеет вид*

$$\lambda = \lambda_n + (-1)^n \left(C_1 e^{-2\ell_+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 e^{-2\ell_-\sqrt{1-\lambda}} \right) + O\Big(e^{-4\ell_+\sqrt{1-\lambda}} + e^{-4\ell_-\sqrt{1-\lambda}} \Big),$$

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Работа выполнена при финансовой поддержке «Фонда поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса"».

Литература

1. Borisov D., Exner P. and Gadyl'shin R. Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip // Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 43, № 12. C. 6265–6278.