

Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Справедливые раскраски неоднородных гиперграфов

Ширгазина Ирина Рафаэлевна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: IShirgazina@yandex.ru

В докладе рассматривается задача экстремальной комбинаторики, связанная со справедливыми раскрасками гиперграфов. Напомним, что раскраска множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной* для гиперграфа H , если в этой раскраске все ребра H не являются одноцветными. Раскраска в r цветов называется *справедливой*, если она является правильной и все цветовые классы имеют почти одинаковую мощность, отличающиеся максимум на единицу.

Для гиперграфа $H = (V, E)$ введем величину $f(H)$ по правилу $f(H) = \sum_{e \in E} 2^{1-|e|}$, т.е. $f(H)$ — это математическое ожидание числа одноцветных ребер гиперграфа в случайной раскраске в два цвета. В 1973 году П. Эрдемем и Л. Ловасом был поставлен вопрос о поиске максимальной границы значения величины $f(H)$ для гиперграфов с минимальной мощностью ребра n , которая гарантирует существование правильной раскраски в два цвета. В статье [1] Й. Бек показал, что соотношение

$$f(H) \leq \frac{\log^*(n) - 100}{7},$$

гарантирует 2-раскрашиваемость гиперграфа H , имеющего минимальную мощность ребра n . Здесь через $\log^*(n)$ обозначена функция, обратная башне из n двоек.

Недавно Д.А. Шабановым был получен аналог результата Бека для случая простых гиперграфов, т.е. гиперграфов, различные ребра которых имеют не более одной общей вершины. Он показал, что условие $f(H) = O(\sqrt{n})$ обеспечивает существование правильной раскраски в два цвета. Мы же усиливаем этот результат, показывая, что при тех же ограничениях можно получить и справедливую раскраску в нужное число цветов.

Теорема 1. Пусть $H = (V, E)$ — простой гиперграф с минимальной мощностью ребра $n = \min_{e \in E} |e|$ и $|V|$ делится на r . Тогда если

$$f_r(H) = \sum_{e \in E} r^{1-|e|} \leq c\sqrt{n},$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа, то для H существует справедливая раскраска в r цветов.

Источники и литература

- 1) Beck J. On 3-chromatic hypergraphs// Discrete Mathematics, Vol. 24 No. 2 1978. pp. 127-137.