Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О приближёных формулах для доходности облигации к погашению

Фалин Андрей Геннадьевич
Студент (бакалавр)
Финансовый университет, Москва, Россия
E-mail: falin.ins@gmail.com

Рассмотрим стандартную облигацию номиналом F, которая выплачивает постоянный купон $C = cF$ через равные промежутки времени (в соответствии со стандартом Act/Act ICMA мы принимаем длину купонного периода в качестве единицы времени). Пусть n –число оставшихся купонных выплат. Если облигация приобретается в квазикупонный момент, то срок до погашения равен n, а при заданной доходности к погашению (yield to maturity) YTM её цена P легко вычисляется по формуле $P = f(YTM)$, где $f(x) = C(1-(1+x)^{-n})/x + F(1+x)^{-n}$.

Гораздо важнее и интереснее обратная операция: по заданной цене облигации P (и фиксированных: купонном проценте c, сроке до погашения n, номинале F) вычислить YTM. С математической точки зрения дело сводится к решению уравнения доходности $f(x) = P$. Хорошо известно, что это уравнение имеет и притом единственное решение $x = YTM$ на промежутке $x > -1$; это решение равно 0, положительно или отрицательно в зависимости от того, цена равна, меньше или больше общей суммы $S = F + nC$ всех средств, которые получит владелец облигации, если будет держать её до момента погашения. Однако, определить YRT можно только численно (например, с помощью метода касательных Ньютона; именно этот метод реализован в Microsoft Excel). В то же время с практической точки зрения важно иметь простые формулы, которые позволяли бы, пусть и приближённо, но быстро, оценить истинное значение YTM. В литературе по облигациям известно много таких формул (см., например, [1]–[4]). Чаще всего в качестве приближённого значения YTM используют: простую доходность к погашению (simple yield to maturity) $SY = (C+(F-P)/n)/P$, средний процент к погашению (averagerate of interest to maturity) $ARTM = (C+(F-P)/n)/(0.5(P+F))$, уточнённый средний процент к погашению $Y = (C+(F-P)/n)/(0.5(P+P^*))$, где $P^* = P+(F-P)(n-1)/n$ – оценка цены в начале последнего купонного периода. Эти величины имеют простой интуитивный смысл, который и мотивирует их использование в качестве приближений для YTM. Их также можно получить и формально-математическими преобразованиями. Например, Y можно получить, если: (1) преобразовать уравнение доходности $f(x) = P$ к виду $c - x = (P-F)x(1-(1+x)^{-n})^{-1}$; (2) разложить правую часть в ряд Тейлора по степеням x; (3) отбросить члены степени 2 и больше; (4) решить полученное линейное уравнение [4].

Я предлагаю использовать для получения приближений графический метод, который ранее не применялся (см. [4], где дан хороший исторический обзор по методам приближения YTM). Этот метод заключается в следующем. A priori мы знаем, что функция $f(x)$ монотонно убывает, выпукла вниз, $f(0) = S$, $f(c) = F$. Для получения приближённого значения YTM заменим эту функцию более простой функцией $h(x)$, обладающей теми же свойствами. Тогда уравнение доходности заменится уравнением $h(x) = P$, корень которого и даст приближённое значение YTM. Простейший вариант – взять гиперболу. В самом общем виде уравнение гиперболы можно записать в виде: $h(x) = (\alpha x+\beta)/(\gamma x+1)$, $\gamma \neq 0$. Условия $h(0) = S$, $h(c) = F$ выполнены тогда и только тогда, когда $h(x) = F((\gamma-n)x+cn+1)/(\gamma x+1)$. Если $\gamma > -1/c$; (в частности, если $\gamma > 0$), то эта функция монотонно убывает и выпукла вниз. Решая уравнение $h(x) = P$, мы получим целую серию приближений для YTM:

$$y_{appr}(\gamma) = (C+(F-P)/n)/(\gamma P/n+(n-\gamma)F/n).$$

Остался ещё один параметр, γ. Выбирая из тех или иных условий его конкретное значение, мы получим конкретное приближение для доходности к погашению.

1. Требование, чтобы $h(x)$, как и $f(x)$, при $x \to +\infty$ стремилась к 0, означает, что $\gamma = n$. При этом значении γ наша общая формула даст простую доходность к погашению.

2. Если взять $\gamma = n/2$, то наша общая формула даст средний процент к погашению.

3. Потребуем равенство производных функций $f(x)$ и $h(x)$ в точке $x = 0$. Поскольку $h'(0) = -Fn(c\gamma + 1)$, $f'(0) = -Fn(c(n+1)/2 + 1)$, это условие равносильно равенству $\gamma = (n+1)/2$. При этом значении γ наша общая формула даст уточнённый средний процент к погашению. Условие выбора γ, приводящее к этому приближению, объясняет хорошо известную его высокую точность.

Источники и литература

1) Johnson, R.S. Bond Evaluation, Selection, and Management. 2nd Ed., Wiley. 2010.

2) Brown, P.J. Bond Markets: Structures and Yield Calculations. ISMA. 1998.

3) Hawawini, G.A., Vora, A. On the theoretical and numerical problems of approximating the bond yield to maturity // The Engineering Economist. 1979, No.4(25). p.301-325.

4) Hawawini, G.A., Vora, A. Yield Approximations A Historical Perspective // The Journal of Finance. 1982, No.1(37). p.145 – 156.