Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О краевых задачах для нелинейного эллиптического уравнения в областях с гельдеровой границей.

Цылин Иван Вячеславович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия

E-mail: ioxlxoi@yandex.ru

Пусть M — гладкое компактное связное многообразие без края, $\Omega \subsetneq M$ — подобласть. Исследуется гладкость решения задачи минимизации функционала

$$\mathcal{F}_f(u) = \mathcal{F}_0(u) - \mathcal{L}_f(u), \quad f \in W_q^{-1}(\Omega),$$
$$\mathcal{F}_0(u) = \int_\Omega F(x, \nabla u)\, dV, \quad \mathcal{L}_f(u) = \int_\Omega f u\, dV$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. На функцию F наложим условия:

F1 $F \in C(TM; \mathbb{R})$.

Так как TM является локально тривиальным расслоением, то в каждой карте U элемент $z \in TM$ можно отождествить с парой $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^d$; потребуем

F2 F дифференцируема и выпукла по ξ.

Положим $\mathbf{a} = \nabla_\xi F$. Пусть в некотором атласе $\{U_n\}$ выполнены условия роста

F3 $\exists \mu > 0 : |F(x, \xi)| \le \mu(1 + |\xi|^p)$, $|\mathbf{a}(x, \xi)| \le \mu(1 + |\xi|^{p-1})$,

тогда $\mathcal{F}_0$ корректно определен и его дифференциал Гато $\mathcal{A}_0 : V \to V'$ задается (см [1])

$$\langle \mathcal{A}_0 u, v \rangle = \int_\Omega \mathbf{a}(x, \nabla u(x)) \nabla v(x)\, dV, \quad \forall u, v \in W_p^1(\Omega).$$

Пусть F дополнительно удовлетворяет условиям:

F4 а) Если $p \ge 2$ и для любых $x \in U$, $\xi, \eta \in (\mathbb{R}^d, |\cdot|)$, где $|\xi|^2 = g^{ij}\xi_i\xi_j$ выполнено:

$$\exists \alpha > 0 : \quad (\mathbf{a}(x, \xi) - \mathbf{a}(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \ge \alpha |\xi - \eta|^p;$$

б) Если $p < 2$ и имеет место:

$$\exists \alpha > 0 : \quad (\mathbf{a}(x, \xi) - \mathbf{a}(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \ge \alpha \frac{|\xi - \eta|^2}{(|\xi| + |\eta|)^{2-p}},$$

В обоих случаях $\mathcal{F}_f$ допускает единственную минимизирующую точку $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, удовлетворяющую

$$-\mathrm{div}(\mathbf{a}(x, \nabla u(x))) = f(x), \quad x \in \Omega$$

в смысле распределений.

Даже в случае линейной задачи $F(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2$, для любой области Ω и произвольной правой части $f \in L_2(\Omega)$ решения задачи принадлежат пространству $H^2_{loc}(\Omega)$. Отказаться от локальности в этом утверждении нельзя если не наложены дополнительные условия на область Ω, например, ее выпуклость или принадлежность границы классу $C^{1,1}$ (см [2]).

Для ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей, в случае оператора Лапласа, Jerison и Kenig установили эффект повышения гладкости (см [3]); а именно, если $f \in H^{-1+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/2)$, то решение задачи принадлежит $H^{1+s}(\Omega)$. Savaré разработал метод (см [4]), позволивший обобщить это утверждение на эллиптические операторы второго порядка с липшицевыми коэффициентами.

Эта статья продолжает исследование, намеченное в [5] и развивает подход, предложенный в [4]. Удалось сохранить эффект повышения гладкости (относительно правой части) решения в случае областей Ω с гельдеровой границей и весьма слабых дополнительных ограничениях на вид функционала $\mathcal{F}_f$.

Источники и литература

1) Giaquinta M., Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems, Annals of Mathematical Studies, No. 105, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
2) Grisvard P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, London, 1985.
3) Jerison D., Kenig C. Boundary value problems on Lipschitz domains. In W. Littman, editor, Studies in Partial Differential Equations, number 23 in MAA Studies in Math., pages 1-68. 1982.
4) Savare G. Regularity and perturbation results for elliptic equations on Lipschitz, J. Funct. Anal. 1998. V. 152. P. 176-201, 1998.
5) Степин А.М., Цылин И.В. О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях. Доклады Академии Наук – 2015.

Слова благодарности

Автор пользуется возможностью выразить глубокую благодарность своему научному руководителю А. М. Степину за полезные обсуждения, комментарии и советы.