Секция «Математика и механика»

Метод параметрикса и представление решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Кожина Анна Александровна

МГУ, , Москва, Россия
E-mail: istochkoj@gmail.com

Рассмотрим СДУ (для простоты ограничимся одномерным случаем и коэффициентами класса C^∞)

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, 0 \le t < T, X_0 = \xi \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma, b \in C_b^\infty$ - множество C^∞ функций с ограниченными производными.

Предположим, что переходные вероятности диффузионного процесса задаются гладкой плотностью, удовлетворяющей обратному уравнению А.Н. Колмогорова. Изучение гладкости переходной плотности является одной из целей исчисления Маллявэна [2]. Но мы здесь не будем касаться этих вопросов.

Как следует из работы [3], для любой функции $f \in C_b^\infty$ может быть получено представление:

$$f(X_1) = Ef(X_1) + \sum_{k=1}^{n} J_k(f_k) + J_{n+1}(g_{n+1}), \tag{2}$$

где

$$g_n(s_1, \dots, s_n) = \nabla_\sigma P_{s_2-s_1} \dots \nabla_\sigma P_{1-s_n} f(x_{s_1}));$$
$$f_n = Eg_n(s_1, \dots, s_n) = P_{s_1} \nabla_\sigma P_{s_2-s_1} \dots P_{1-s_n} f(\xi),$$

и $J_k(f_k) - k-$кратный винеровский интеграл от функции f_k по $k-$мерному кубу $T^k = [0, T]^k$.

Несмотря на то, что (2) дает явное конечное хаотическое разложение для функции $f(X_t)$, подчеркнем, что в нём используется переходная плотность процесса X_t, которая известна лишь в исключительных случаях. Применяя метод параметрикса в форме Мак-Кина и Зингера [3], автором было получено представление для $f(X_t)$, использующее лишь коэффициенты уравнения (1). При этом, для подынтегральных функций f_k были получены явные представления в виде рядов. Таким образом, предлагаемый подход позволяет представить $f(X_t)$ в виде конечного ряда с остаточным членом, причем члены ряда зависят только от коэффициентов $b(x), \sigma(x)$ уравнения (1).

Кроме того, используя оценки членов ряда параметрикса ([1], Лекция 3,Лемма 2), получим, что при использовании лишь первых N членов ряда параметрикса, погрешность в определении проекции на соответствующие хаосы (погрешность в $L^2(T^k)$,точное значение проекций соответствует разложению (2)) убывает со сверхэкспоненциальной скоростью по N.

Литература

1. Конаков В. Д. Метод параметрикса для диффузий и цепей Маркова.Издательство попечительского совета механико-математического факультетаМГУ. Серия WP BRP "STI". 2012. No 2012.
2. D. Nualart. The Malliavin calculus and related topics. Springer. 2000.
3. H. Yaozhong. Ito-Wiener chaos expantion with exact residual and correlation, variance inequalities. Journal of Theoretical Probability, October 1997, Volume 10, Issue 4, pp 835-848.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. В. Д. Конакову за постановку задачи и внимание в работе.