Секция «Математика и механика»

Описание функционалов к весовым пространствам последовательностей

Мамбеткулова Илина Галимовна
Студент
Башкирский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия
E-mail: ilina2701@yandex.ru

Пусть $\{W_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – положительная последовательность. Рассмотрим пространство

$$l_W^2 = \left\{\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} : \|b\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^2 / W_n < \infty\right\}$$

Нашей задачей будет описание пространства функционалов над l_W^2 с помощью обобщенного преобразования Фурье-Лапласа

$$\widehat{b}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{b_n} e^{zn}}{W_n}, (b = \{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, e_z = \{e^{zn}\}_{n=-\infty}^{+\infty}).$$

Обозначим $\phi(n) = ln\sqrt{W_n}$ и введем функцию $\phi(t) = (\phi(k+1) - \phi(k))t + \phi(k) - k(\phi(k+1) - \phi(k))$ при $x \in [k, k+1), k \in \mathbb{Z}$. Графиком этой функции является ломаная с вершинами в целочисленных точках. Положим,$\widetilde{\phi}(x) = sup(xt - \phi(t))$ – сопряженная по Юнгу к функции $\phi(x)$. Пусть $x_k = \phi(k+1) - \phi(k)$. Определим $I = \left\{x \in \mathbb{R} : \widetilde{\phi}(x) < \infty\right\}$ и функцию $\rho_{\widetilde{\phi}}(x)$ из условия

$$\widetilde{\phi}(x + \rho(x)) + \widetilde{\phi}(x - \rho(x)) - 2\widetilde{\phi}(x) \equiv 1$$

Теорема 1. Обобщенное преобразование Фурье-Лапласа $\widehat{b}(z)$ функционала b на l_W^2 является аналитической в полосе $I + i\mathbb{R}$ 2π-периодичной по y функцией, удовлетворяющей условию

$$\left\|\widehat{b}\right\|_{\widetilde{\phi}}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{b}(x_n + iy)\right|^2 dy e^{-2\widetilde{\phi}(x_n)} \rho_{\widetilde{\phi}}(x_n) \leq e^2 \|b\|_W^2.$$

Если функция $\phi(t)$ – выпуклая, то пространство

$$l_\phi^2 = \left\{\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} : \|b\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|^2 e^{-2\phi(n)} < \infty\right\}$$

изоморфно пространству аналитических $F(z)$ в полосе $I + i\mathbb{R}$ и 2π-периодичных по y функций с нормой $\|F\|_{\widetilde{\phi}}^2$. Более того, справедливы неравенства

$$e^{-2} \|b\|_\phi^2 \leq \left\|\widehat{b}\right\|_{\widetilde{\phi}}^2 \leq e^2 \|b\|_\phi^2$$

(то есть пространства почти изометричны). Приведенная теорема основана на следующих работах [n1], [n2].

Литература

1. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства// Математические заметки. 1990. Т. 48, Вып. 5. С. 80-87.

2. Луценко В.И. Теорема Пэли-Винера на неограниченном интервале// Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. С. 79-85.