Секция «Математика и механика»

Собственные функции и собственные значения одной краевой задачи в полосе

Нугаева Ирина Гамировна
Студент
Башкирский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, Уфа, Россия
E-mail: nuga-irina@yandex.ru

В настоящей работе изучаются спектральные свойства "двумерного"гармонического осциллятора в полосе $\Pi = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq \pi\}$. Рассмотрим оператор: $L_0 u = -\Delta u + x^2 u$ задачи Дирихле, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в пространстве $L^2(\Pi)$. В операторе L_0, разделяя переменные, получим сумму двух одномерных операторов $L_0 u = L_1 u + L_2 u$, где $L_1 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 u$ – одномерный гармонический осциллятор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [n2]; $L_2 u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $0 \leq y \leq \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$ – одномерный оператор Лапласа задачи Дирихле [n1]. Тогда спектр оператора L_0 состоит из собственных значений $\lambda_{mn} = 2m + 1 + n^2$, $m = 0, 1, 2, ...$, $n = 1, 2, ...$ Обозначим через P_{mn}– проекторы на собственные подпространства оператора L_0, соответствующие λ_{mn}.
Теорема. Спектр оператора L_0 можно разбить на четыре серии: λ^i_{mn}, $i = 1, 2, 3, 4$ собственных значений, которые при каждом m имеют кратность n. Соответствующие ортогональные проекторы имеют вид:

$$P^{(1)}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} P^{(1)}_{2(n^2-k^2)+m} \otimes P^{(2)}_{2k},$$

$$P^{(2)}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} P^{(1)}_{2(n^2-k^2-k)+m-1} \otimes P^{(2)}_{2k+1},$$

$$P^{(3)}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} P^{(1)}_{2(n^2-k^2+n-k)+m} \otimes P^{(2)}_{2k+1},$$

$$P^{(4)}_{mn} = \sum_{k=1}^{n} P^{(1)}_{2(n^2-k^2+n)+m} \otimes P^{(2)}_{2k}$$

Где $P^{(1)}_s$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство оператора L_1, соответствующее собственным значениям $2s + 1$, то есть $P^{(1)}_s \varphi = (\varphi, \varphi_s)\varphi_s$, где $\varphi_s(x) = (2^s s! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_s(x)$, $H_s(x)$–многочлены Эрмита. А $P^{(2)}_l$ – ортонормированный проектор на собственное подпространство оператора L_2, соответствующий собственным значениям l^2, то есть $P^{(2)}_l f = (f, f_l) f_l$, где $f_l(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinly$, $y \in [0, \pi]$.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981

2. Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора //Математический сборник.2001. Т.192. №5. С. 87-124