Секция «Математика и механика»

Даламбертиан типа Леви и калибровочные поля

Волков Борис Олегович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: boris–volkov@yandex.ru

Связность (вектор-потенциал) является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда порожденный этой связности параллельный перенос, рассматриваемый как операторнозначный функционал на пространстве кусочно-гладких кривых, является Леви-гармоническим. Это факт был доказан в работе [1] Л. Аккарди, П. Джибилиско и И. В. Воловича для лапласиана Леви, определенного через специальный вид второй производной. В работе получены аналогичные результаты о связи оператора Даламбера-Леви с уравнениями Янга-Миллса-Хиггса, а также уравнениями квантовой хромодинамики. В работе используется неклассический даламбертиан Леви, определенный с помошью среднего Чезаро вторых производных по направлениям.
Пусть $p_0,\ldots,p_3$ — базис в $\mathbb{R}^{1,3}=\{x_0,\ldots,x_3\}$. Метрика η в этом базисе имеет диагональный вид с диагональю: $\{1,-1,-1,-1\}$. Пусть $H=\{\sigma\in W_2^1([0,1],\mathbb{R}^{1,3})\colon \sigma(0)=0\}$. Выберем следующий ортонормированный базис в H: $e_n(r)=p_{n-1-d\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor}f_{\lfloor\frac{n-1}{d}\rfloor}(r)$, где $f_0(r)=r$ и $f_j(r)=\frac{\sqrt{2}}{\pi j}\sin(\pi jr)$ для $j\in\mathbb{N}$.
Определение. Неклассический даламбертиан Леви, — это линейное отображение из $dom\Box_{L_1}$ в пространство всех $gl(N)$ -значных функций на H, определенное следующим образом:

$$\Box_{L_1}F(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0}F(\sigma+\alpha\pi kp_0f_k)-\sum_{i=1}^{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0}F(\sigma+\alpha\pi kp_if_k), \tag{1}$$

где $dom\Box_{L_1}$ пространство $gl(N)$-значных функций на H, для которых правая часть (1) существует для всех $\sigma\in H$.
Определение. Производная D_u в конечной точке по направлению $u\in\mathbb{R}^{1,3}$ — это отображение из $domD_u$ в пространство всех V_1-значных функций на H (V_1 — некоторое конечномерное векторное пространство), определенное так:

$$D_uF(\sigma)=\frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}F(\sigma+\alpha uf_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}(-1)^n\frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}F(\sigma+\alpha uf_n), \tag{2}$$

где $domD_u$ — пространство V_1-значных функций на H, для которых правая часть (2) существует для всех $\sigma\in H$.
Пусть $A_\mu(x)dx^\mu$ — C^3-гладкая $u(N)$-значная 1-форма на $\mathbb{R}^{1,3}$. Тогда, $A_\mu(x)dx^\mu$ задает связность. Тензор кривизны — это $u(N)$-значная 2-форма $\sum_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu$, где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$. Ковариантная производная тензора кривизны: $\nabla_\lambda F_{\mu\nu}=\partial_\lambda F_{\mu\nu}+[A_\lambda,F_{\mu\nu}]$. Мы рассмотрим параллельный перенос как функцию $U\colon H\to G$,

определенную так:

$$U(\sigma) = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_{0,1}^k} dt_1 \dots dt_k \left(-A_\mu(\sigma_{t_k})\sigma'^{\mu}_{t_k}\right) \dots \left(-A_\mu(\sigma_{t_1})\sigma'^{\mu}_{t_1}\right),$$

где $\sigma \in H$ и $\Delta_{0,1}^k := \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \le t_1 \le \dots \le t_k \le 1\}$.Пусть$\{\mathrm{g}_\alpha\}_{\alpha=1}^4$ - фиксированный базис в $\mathbb{C}^4$. Если $\varphi = \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_\alpha \otimes g_\alpha \in \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4$, то символ $\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi$ обозначает следующий оператор на $\mathbb{C}^N$ $\overline{\varphi}\gamma_\mu\varphi = \sum_{\alpha=1}^4((I_N \otimes \gamma_0\gamma_\mu)\varphi)_\alpha \otimes \varphi_\alpha^*$, где γ^μ — матрицы Дирака. Пусть $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{1,3}, \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4)$ Рассмотрим функцию $\Psi\colon H \to \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^4$, определенную так: $\Psi(\sigma) = (U(\sigma)^{-1} \otimes I_4)\psi(\sigma(1)), \sigma \in H$.

Теорема. (A, ψ) удовлетворяют системе уравнений квантовой хромодинамики

$$\begin{cases} (I_N \otimes \gamma^\mu)(\partial_\mu + A_\mu \otimes I_4)\psi + im\psi = 0 \\ \nabla_\mu F^\mu_\nu = -i(\overline{\psi}\gamma_\nu\psi). \end{cases}, \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда параллельный перенос U и функция Ψ, определенная выше, удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I_N \otimes \gamma^\mu)D_\mu\Psi + im\Psi = 0 \\ \Box_{L_1}U(\sigma) = iU(\sigma)\displaystyle\int_0^1 dr\overline{\Psi(\sigma^r)}\gamma_\nu\Psi(\sigma^r)\sigma'^{\nu}(r), \end{cases} \tag{4}$$

где $D_\mu = D_{p^\mu}$ и для каждого $r \in [0,1]$ кривая $\sigma^r \in H$ определена так: $\sigma^r(t) = \sigma(rt)$. Пусть связность на $\mathbb{R}^{1,3}$ задана C^3-гладкая $su(N)$-значная 1-форма на $\mathbb{R}^{1,3}$. Пусть $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{1,3}, su(N))$. Рассмотрим функцию $\Phi\colon H \to su(N)$, определенную так:

$$\Phi(\sigma) = U(\sigma)^{-1}\phi(\sigma(1))U(\sigma).$$

Теорема. (A, ϕ) удовлетворяют системе уравнений Янга-Миллса-Хиггса:

$$\begin{cases} \nabla^\mu\nabla_\mu\phi(x) - (\mu^2 - \lambda\mathrm{trace}(\phi^*(x)\phi(x))\phi(x) = 0 \\ \nabla_\mu F^\mu_\nu(x) - [\phi(x), \nabla_\nu\phi(x)] = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\nabla_\nu\phi = \partial_\nu\phi + [A_\nu, \phi]$, тогда и только тогда, когда параллельный перенос U и функция Ψ, определенная выше, удовлетворяют:

$$\begin{cases} \eta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\Phi(\sigma) - (m^2 - \lambda\mathrm{trace}(\Phi^*(\sigma)\Phi(\sigma))\Phi(\sigma) = 0 \\ \Box_{L_1}U(\sigma) + U(\sigma)\displaystyle\int_0^1 dr[\Phi(\sigma^r), D_\nu\Phi(\sigma^r)]\sigma'^{\nu}(r) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Эквивалентность первых уравнений систем (3) и систем (4) и эквивалентность первых уравнений системы (5) и (6) была доказана в работе Л. Гросса [2].

Литература

1. Accardy L., Gibilisco P., Volovich I.V. Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians, Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. V. 2. No. 2. Pp. 235-250.

2. Gross L., A Poincare lemma for connection forms, Journal of Functional Analysis. 1985. V. 63. Pp. 1–46.

Слова благодарности

Автор благодарен за внимание к работе и поддержку профессору Олегу Георгиевичу Смолянову.