

## ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*Маянцев Кирилл Сергеевич*

*Студент*

*Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: kirill.mayantsev@yandex.ru*

В работе рассматривается математическая модель сложной системы, относящаяся к классу гибридных. Для нее характерно сочетание «непрерывной» динамики, описываемой при помощи разностных уравнений, а также «дискретных» правил для моментального, скачкообразного изменения законов движения. Такие смены режимов функционирования, называемые переключениями, могут реализовываться при определенных условиях, зависящих от текущего состояния. Совокупная система обладает сложной, нелинейной динамикой даже при очень простых уравнениях, описывающих отдельные ее компоненты.

Математические модели гибридных и, в частности, кусочно-линейных, систем активно изучаются в связи с различными приложениями ([1–2]). Для таких моделей актуальным является решение разнообразных классических задач теории управления: проблем достижимости, разрешимости, верификации, синтеза управлений.

В данной работе рассматривается частный случай математической модели гибридной системы, в которой непрерывная компонента задана при помощи набора линейных разностных уравнений:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_j(k)x(k) + B_j(k)u(k), \\ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}, \\ A_j(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B_j(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}. \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $j$  — номер «активной» подсистемы, а  $u(k)$  — вектор управляющих параметров, на возможные значения которого накладываются ограничения:  $u(k) \in \mathcal{P}$ .

Замена одной системы таких уравнений на другую (переключение) происходит при пересечении траекторией текущей подсистемы определенной гиперплоскости в фазовом пространстве. Переключения являются обязательными.

Для кусочно-линейной системы решаются задачи достижимости и разрешимости на конечном интервале времени, при любом допустимом количестве переключений.

Целью работы является аппроксимация множеств и трубок достижимости и разрешимости кусочно-линейной системы, получение формул, позволяющих рассчитывать отдельные «ветви» таких множеств. Стоит отметить, что каждая такая «ветвь» представлена в виде суперпозиции конечного набора многозначных операторов, результат действия каждого из которых может быть аппроксимирован, например, при помощи многогранника.

Выбранный численный метод аппроксимации гарантирует, что на каждой итерации сложность вычислений не возрастает. Данный эффект обеспечивается за счет ограничения количества вершин аппроксимирующего многоугольника. Для поддержания данного свойства необходимо аппроксимировать результат трех операций, входящих в уравнение (1), а именно: умножения на матрицу, суммирования по Минковскому и пересечения с множеством типа «полоса».

Данный метод проиллюстрирован ниже: на рис. 1–4 изображены исходный многоугольник, а также результаты последовательного применения трех описанных операций (количество вершин многоугольников не превосходит 7).

Написана программа, позволяющая проводить численные расчеты множеств достижимости для рассматриваемого примера кусочно-линейной системы, а также строить иллюстрации методами компьютерной графики. Пример работы программы приведен на рис. 5.

### Иллюстрации

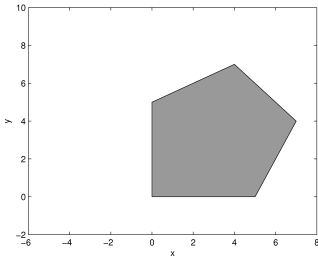


Рис. 1: Рассматриваемый пятиугольник.

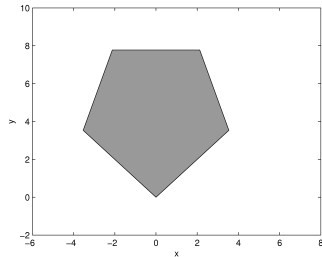


Рис. 2: Результат умножения пятиугольника на матрицу.

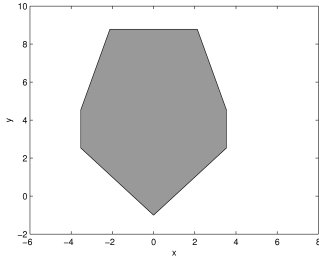


Рис. 3: Результат суммы пятиугольника и множества, являющегося отрезком  $[-1; 1]$ .

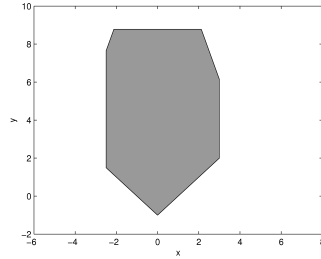


Рис. 4: Результат пересечения полученного семиугольника с множеством-полосой.

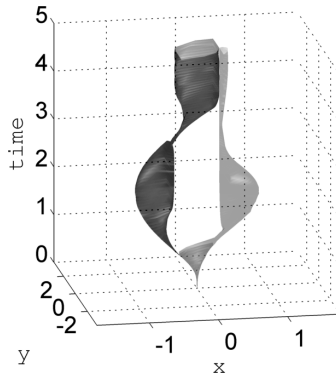


Рис. 5: Пример работы программы: две ветви трубки достижимости.

### Литература

1. Куржанский А. Б., Точилин П. А. Слабо инвариантные множества гибридных систем. // Дифференциальные уравнения, т. 44, №11, с. 1523–1533, 2008.
2. Bemporad A., Ferrari-Trecate G., Morari M. Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems. // IEEE transactions on Automatic Control, Vol. 45, №10, October 2000.
3. Schaft A. J. van der, Schumacher J. M. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, №251, 2000.