Свойства позиционной функции цены в задаче импульсного управления при неопределённости

Минаева Юлия Юрьевна

Ассистент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: yminaeva@gmail.com

Работа посвящена исследованию систем с импульсным управлением, допускающим использование линейных комбинаций дельта-функций [1], при наличии неизвестной ограниченной помехи — неопределённости. Задачи с программным импульсным управлением достаточно хорошо изучены [2]. Когда в системе действует помеха, важно получить управление в виде синтеза, зависящее от времени и позиции системы. Одним из способов решения этой задачи является введение функции цены. Если удаётся доказать, что функция цены удовлетворяет уравнению типа Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса (ГЯБА), то оно может быть использовано при синтезе управления. В настоящей работе, по аналогии с [3], определена позиционная функция цены. Для неё доказан принцип оптимальности и выведено уравнение типа ГЯБА. Также показано, что позиционная функция цены равна предельной функции цены в задаче с коррекциями движения [4].

Рассмотрим систему с импульсным управлением $U(\cdot)$ при неопределённости $v(\cdot)$

$$dx(s) = A(s)x(s)ds + B(s)dU(s) + C(s)v(s)ds, \quad x(t) = x, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, время $s \in [t, t_1]$. Задан функционал

$$J(U(\cdot), v(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t,t_1+0)} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)). \qquad (2)$$

Цель управления — минимизировать функционал (2) на траекториях системы (1). Определим множество возможных помех

$$\mathcal{M}(t) = \{v : [t, t_1] \to \mathbb{R}^q \mid v(\cdot) \in L^\infty[t, t_1],\, v(s) \in \mathcal{Q}(s)\},$$

где L_∞ — пространство измеримых, почти всюду ограниченных функций, $\mathcal{Q}(s)$ — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^q$. Управление U принадлежит классу функций ограниченной вариации $BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$. Отображение $\mathcal{U} : \mathcal{M}(t) \to BV([t, t_1], \mathbb{R}^m)$ назовём стратегией управления. Будем рассматривать только не упреждающие стратегии. Множество всех позиционных управлений, обозначим как $\Omega(t)$.

Введем позиционную функцию цены, соответствующую наилучшему значению функционала задачи, которое можно получить в классе позиционных управлений

$$\mathbb{V}(t,x) = \inf_{\mathcal{U}\in\Omega(t)} \sup_{v\in\mathcal{M}(t)} \{ \operatorname*{Var}_{[t,t_1+0)} \mathcal{U}[v] + \varphi(x(t_1+0))\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого $\tau \in [t, t_1]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ для функции цены (3) выполняется принцип оптимальности:*

$$\mathbb{V}(t,x) = \inf_{\mathcal{U}\in\Omega(t)} \sup_{v\in\mathcal{M}(t)} \{ \operatorname*{Var}_{[t,\tau+0)} \mathcal{U}[v] + \mathbb{V}(\tau, x(\tau))\}.$$

Теорема 2. *Позиционная функция цены $\mathbb{V}(t,x)$ удовлетворяет уравнению типа ГЯБА:*

$$\begin{gathered} \min\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = 0, \\ \mathcal{H}_1(t,x,\mathbb{V}_t,\mathbb{V}_x) = \mathbb{V}_t + \max_{v\in\mathcal{Q}} \langle \mathbb{V}_x, A(t)x + C(t)v \rangle, \\ \mathcal{H}_2(t,x,\mathbb{V}_t,\mathbb{V}_x) = \min_{\|h\|=1} \{\|h\| + \langle \mathbb{V}_x, B(t)h\rangle\}. \end{gathered}$$

Литература

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщённых функций. Обобщённые функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1958.

2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

3. Evans L. C., Souganidis P. E. Differential Games and Representation Formulas for Solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equation // Indiana Univ Math J. 1984. V. 33, № 5. P. 773–797.

4. Daryin A. N., Kurzhanski A. B., Minaeva Yu. Yu. On the Theory of Fast Controls under Disturbances // 18th IFAC World Congress, Milan. 2011.