Секция «Математика и механика»

Многоканальные системы обслуживания с ограничениями и регенерирующим входящим потоком.

Ткаченко Андрей Викторович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: tkachenko.av.87@gmail.com

Рассматривается многоканальная система обслуживания с r различными приборами. Времена обслуживания требований — независимые случайные величины и, если n-е требование обслуживается на i-м приборе, то время обслуживания η_n^i распределено по закону $B_i(x)$ с конечным средним β_i^{-1}. Положим $\beta = \sum_{i=1}^r \beta_i$. Требования обслуживаются в порядке их поступления.

Входящий поток $X(t)$ регенерирующий. Обозначим θ_i — моменты регенерации $X(t)$, $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1},\ (i = 1, 2, \dots)$ — периоды регенерации, $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$ — число требований, поступивших на i-м периоде регенерации. Предположим, что $a = E\xi_i < \infty$, $\tau = E\tau_i < \infty$, и $\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} = a\tau^{-1}$ п.н..

Пусть задана последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящая от входного потока и последовательности времен обслуживания. Случайная величина v_n может быть несобственной и $\alpha = P\{v_n = \infty\}$, $C(x) = P\{v_n \le x | v_n < \infty\}$. При этом v_n ограничивает время ожидания (пребывания) n-го требования в системе, то есть, если по истечении времени v_n требование не начало (не закончило) свое обслуживание, то оно покидает систему. В первом случае мы имеем систему с ограниченным временем ожидания, во втором — пребывания. Пусть $q(t)$ — число требований в системе в момент t. При некоторых дополнительных предположениях $q(t)$ — регенерирующий процесс и θ_i является его точкой регенерации, если $q(\theta_i - 0) = 0$.

Теорема 1. Процесс $q(t)$ эргодичен тогда и только, когда $\rho = \alpha\lambda\beta^{-1} < 1$.

Рассматривается поведение системы в условиях сверхвысокой загрузки ($\rho \ge 1$).

Теорема 2. Если $\rho > 1$ ($\rho = 1$) и для некоторого $\delta > 0$ выполнены условия

$$E\tau_1^{2+\delta} < \infty,\ E\xi_1^{2+\delta} < \infty,\ E(\eta_1^i)^{2+\delta} < \infty,\ i = \overline{1, r}, \qquad (\star)$$

тогда нормированный процесс $\hat{q}_n(t) = \frac{q(nt) - \beta(\rho-1)nt}{\hat\sigma\sqrt{n}}$ слабо сходится на конечном интервале $[0, t]$ к винеровскому процессу (модулю винеровского процесса) при $n \to \infty$. Здесь

$$\hat\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\beta^2,\ \sigma_X = \frac{\alpha\sigma_\xi^2}{\tau} + \frac{(\alpha a)^2\sigma_\tau^2}{\tau^3} - \frac{2a\alpha^2 cov(\xi_1, \tau_1)}{\tau^2},$$

$$\sigma_\beta^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2\beta_i^3,\ \sigma_\tau^2 = Var(\tau_1),\ \sigma_\xi^2 = Var(\xi_1),\ \sigma_i^2 = Var(\eta_1^i),\ i = \overline{1, r}.$$

Также изучается поведение нормированного процесса $q(t)$ в условиях высокой загрузки ($\rho \uparrow 1$). Рассматривается асимптотика сжатия времени, а именно вводится последовательность входящих потоков

$$X_n(t) = X\left(\rho^{-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)t\right)$$

так, что коэффициент загрузки зависит от параметра n и $\rho_n \uparrow 1$ при $n \to \infty$. Пусть $q_n(t)$ — число требований в системе с входящим потоком $X_n(t)$. Тогда, при выполнении условий ($\star$), нормированный процесс $\tilde{q}_n(t) = \frac{q_n(nt)}{\sqrt{n}}$ слабо сходится на конечном интервале $[0, t]$ при $n \to \infty$ к отраженному в нуле диффузионному процессу с параметрами $(-\beta, \tilde{\sigma}^2)$, где $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_\beta^2 + \frac{\sigma_X^2}{\rho}$.
Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 13-01-00653.

Литература

1. *Афанасьева Л. Г., Баштова Е.Е.,* Предельные теоремы для систем массового обслуживания в условиях высокой загрузки, Современные проблемы математики и механики, т. IV, 2009, стр. 40-54.

2. *Афанасьева Л. Г., Ткаченко А.В.,* Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком., Теория вероятностей и ее применения, 2013, в печати.

3. *Iglehart D., Whitt W.,* Multiple Channel in Heavy Traffic I, Adv. Appl. Prob., 2, 1970, pp. 150-177.

4. *Whitt W.,* Stochastic-Process Limits, AT&T Labs Research, New Jersey, 2001.

Слова благодарности

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность проф. Афанасьевой Ларисе Григорьевне за постановку задачи и полезное обсуждение.