Секция «Математика и механика»

Аналог формулы Троттера для потока Арратья

Вовчанский Николай Богданович
Аспирант
Институт математики НАН Украины, отдел теории случайных процессов, Киев, Украина
E-mail: moonknight@ukr.net

Рассматривается задача построения потока Арратья со сносом[1,2] путём реализации аналогичной известной формуле Троттера для детерминированных динамических систем идеи, состоящей в разделении внешнего влияния на динамическую систему конечного числа сил на сумму действий, чередующихся во времени. Потоком Арратья со сносом a называется стохастический поток $\{Y_t^a(u) \mid u \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ такой, что

1. $Y_\cdot^a(u)$ – диффузия с единичным коэффициентом диффузии и коэффициентом сноса a;
2. при $u_1 \leq u_2$ $Y_t^a(u_1) \leq Y_t^a(u_2),\ t \in \mathbb{R}^+$;
3. совместная характеристика мартингальных частей $Y_\cdot^a(u_1)$ и $Y_\cdot^a(u_2)$ равна

$$\int_0^t 1_{\{Y_s^a(u_1)=Y_s^a(u_2)\}} \mathrm{d}s,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Т.о. поток Арратья со сносом есть описание совокупного движения броуновских частиц, независимых до встречи и склеивающихся после, в поле внешней силы. В случае стохастического дифференциального уравнения задача рассматривалась в [3]. Однако для потока Арратья задающего его стохастического дифференциального уравнения нет [5]. Роль одновременно источника шума, порождающего поток Арратья, и стохастического потока, задающего направляющий частицы шум, берёт на себя броуновская сеть $\{\varphi_{s,t}(u) \mid u \in \mathbb{R},\quad 0 \leq s \leq t\}$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ [4,6]. Вторая внешняя сила является действием полугруппы обычного дифференциального уравнения и отвечает за снос частиц в потоке Арратья. Пусть $\{e_t \mid t \geq 0\}$ – поток отображений $\mathbb{R}$ в себя, отвечающий дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ построим

$$\begin{cases} \&x_{0,t}^n(u) = e_t(\varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}} \circ e_{\frac{1}{n}} \circ \varphi_{\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}} \circ \ldots \circ \varphi_{0,\frac{1}{n}}(u)), \quad t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}), \quad u \in \mathbb{R}, \\ \&x_{0;1}^n(u) = \lim_{t \to 1} x_{0;t}^n(u). \end{cases}$$

Теорема. Для $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}$ $\left(x_{0,\cdot}^n(u_1), \ldots, x_{0,\cdot}^n(u_m,)\right)$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к $(Y_\cdot^a(u_1), \ldots, Y_\cdot^a(u_m))$ в $(D([0;1]))^m$, где $D([0;1])$ – пространство Скорохода.

Литература

1. Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки.// Праці Інституту математики Національної Академії наук України. Математика та її застосування, 66. Національна Академія наук України, Інститут математики, Київ, 2007. 290 pp.

2. Arratia R. Ph.D.Thesis// University of Wisconsin, Madison, (1979).

3. Goncharuk, N. Yu., Kotelenez, P. Fractional step method for stochastic evolution equations // Stochastic Process. Appl. 73 (1998), no. 1, 1–45.

4. Fontes L. R. G., Isopi M., Newman C. M., Ravishankar K. The Brownian web: characterization and convergence // Ann. Probab. 32(4):2857–2883, 2004.

5. Tsirelson B. Scaling limit, noise, stability. Lectures on probability theory and statistics, 1–106, Lecture Notes in Math., 1840, Springer, Berlin, 2004.

6. Toth B., Werner W. The true self-repelling motion // Probab. Theory Related Fields 111(3):375–452, 1998.

Слова благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю А.А.Дороговцеву за поддержку, руководство и внимание.