## Секция «Математика и механика»

### Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи

***Славина Нина Сергеевна***
*Аспирант*
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*
*E-mail: SlavinaNina@list.ru*

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Во многих отношениях он является самым сложным из известных случаев интегрируемости механики твёрдого тела. Для любого значения параметра $\lambda$ пара функций $H_\lambda, F_\lambda$ (гамильтониан и интеграл Ковалевской–Яхьи) даёт интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы на каждом многообразии $M_g^4$. При этом оказывается, что топологическая структура возникающего слоения Лиувилля (см. [1]) существенно зависит от обоих параметров $g$ и $\lambda$. Уравнения движения и первые интегралы этой системы имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \overrightarrow{\lambda}) \times \omega - \overrightarrow{a} \times \nu, \qquad \dot{\nu} = \nu \times \omega,$$

$$f_1 = {\nu_1}^2 + {\nu_2}^2 + {\nu_3}^2, \quad f_2 = 2(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) + (\omega_3 + \lambda)\nu_3, \quad H = {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 + \frac{{\omega_3}^2}{2} - \nu_1,$$
$$K = ({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2 + \nu_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \nu_2)^2 + 2\lambda(\omega_3 - \lambda)({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) + 4\lambda\omega_1\nu_3.$$

Здесь $\omega$ — вектор угловой скорости тела-носителя, $\nu$ — единичный вертикальный вектор, $\mathbf{A}$ — диагональная матрица тензора инерции, $\overrightarrow{a}$ — вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс, длина которого равна произведению веса тела на расстояние от его центра масс до неподвижной точки, $\overrightarrow{\lambda}$ - гиростатический момент. Фазовым пространством системы является совместная поверхность уровня интегралов $f_1$ и $f_2$:

$$M_g^4 = \{f_1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, f_2 = 2(\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = g\}.$$

В настоящей работе описывается топологический тип систем типа Ковалевской–Яхьи. Напомним, что интегрируемая система с двумя степенями свободы определяет слоение Лиувилля на каждой трёхмерной регулярной изоэнергетической поверхности. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоения Лиувилля одной системы в слоения Лиувилля другой системы. Поскольку торы Лиувилля на множестве полной меры являются замыканиями нерезонансных траекторий, то Лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют "одинаковые"замыкания решений на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. [1]). Поэтому классификация топологических типов систем Ковалевской–Яхьи сводится к подсчёту инвариантов Фоменко–Цишанга. Основными являются следующие теоремы: Теорема 1. (Н. С. Славина) Интегрируемая система Ковалевской-Яхьи в зависимости от значений гиростатического момента $\lambda$, интеграла площадей $g$ и уровня энергии $H$ распадается на 27 слоений Лиувилля, которые попарно лиувиллево неэквивалентны. Тем самым полностью завершена тонкая лиувиллева классификация слоений семейства систем Ковалевской-Яхьи. Проводя сравнительную характеристику, оказывается, что среди этих слоений есть слоения, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в других случаях интегрируемости твердого тела. Лиувиллева эквивалентность слоений означает лиувиллеву эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем на каких-то уровнях энергии. Из лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем следует, что замыкания интегральных траекторий обоих систем на множестве полной меры совпадают. Теорема 2. (Н. С. Славина) Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на 10 уровнях энергии лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам типа Ковалевской на 10 уровнях энергии $A, C, D, B, J, H, E, I, F, G$. Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [2]. Теорема. Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на 10 уровнях энергии лиувиллево эквивалентны серии интегрируемых систем Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ на 10 уровнях энергии $A, C, D, B, F, G, E, H, I, J$. Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [3]. Теорема 3. (Н. С. Славина) Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на 3 уровнях энергии лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Жуковского на 3 уровнях энергии 7, 9, 2; на 2 уровнях энергии лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Горячева-Чаплыгина-Сретенского на 2 уровнях энергии 1 и 4. Молекулы, возникшие в случаях интегрируемости Жуковского и Горячева-Чаплыгина-Сретенского, и их обозначения взяты из таблиц 5.4, 5.6 т.2 [1]. Теорема 4. (Н. С. Славина) Существует конечное значение энергии $H = H_0$ такое, что при всех значениях $H$ больших $H_0$ бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(H, K)$ случая Ковалевской-Яхьи изоморфны друг другу при любых значениях параметров $g, \lambda$. Топологический тип интегрируемой системы стабилизируется на больших уровнях энергии $H$. Замечание. В случае интегрируемости Ковалевской–Яхьи "высоко"энергетическая молекула оказывается грубо лиувиллево эквивалентна молекуле, обнаруженной ранее в интегрируемой системе Горячева-Чаплыгина-Сретенского (см. меченую молекулу 7 из таблицы 5.6 т.2 [1]). Однако, эти системы лиувиллево не эквивалентны, так как числовые метки различны. Таким образом, это "высоко"энергетическое слоение Лиувилля оказывается новым, в том смысле, что оно не встречается в других интегрируемых системах, исследованных ранее.

## Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. УдГУ., 1999

2. Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сборник, Вып. 191(2). 2000. С. 3-42.

3. Морозов П.В. Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи //Матем. сборник, Вып. 198(8). 2007. С. 59-82.

## Слова благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику А.Т. Фоменко, а также доктору физ.-мат. наук А.А. Ошемкову за постоянное внимание к работе, множество ценных замечаний и консультаций.