Секция «Математика и механика»

Инвариант Фоменко-Цишанга для случая Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости

Николаенко Станислав Сергеевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: nikostas@mail.ru

Движение твёрдого тела в безграничном объёме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности и обладающей однозначным потенциалом скоростей, описывается уравнениями Кирхгофа

$$\dot{s} = s \times \frac{\partial H}{\partial s} + r \times \frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \dot{r} = r \times \frac{\partial H}{\partial s}, \tag{1}$$

где $s, r \in \mathbb{R}^3$ — векторы импульсивного момента и импульсивной силы, а $H = H(s, r)$ — гладкая функция, имеющая смысл полной энергии. Эта система уравнений всегда обладает тремя первыми интегралами: геометрическим интегралом $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, интегралом площадей $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ и интегралом энергии H. Систему (1) можно рассматривать как гамильтонову (относительно скобки Ли-Пуассона) на коалгебре $e(3)^*$ группы движений 3-мерного евклидова пространства. На совместной поверхности уровня $\{f_1 = a^2,\ f_2 = 0\}$ эта система имеет 2 степени свободы, и для её интегрируемости по Лиувиллю требуется ещё один независимый с H почти всюду первый интеграл. В [4] С. А. Чаплыгиным найден случай интегрируемости со следующими гамильтонианом и дополнительным интегралом K:

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + \frac{c}{2}(r_1^2 - r_2^2), \qquad K = (s_1^2 - s_2^2 + cr_3^2)^2 + 4s_1^2 s_2^2.$$

В [4] также выполнено сведение задачи к эллиптическим квадратурам. В [5], с использованием метода булевых функций М. П. Харламова [3], исследована топология изоэнергетических поверхностей, построены бифуркационные множества, описаны бифуркации лиувиллевых торов.

Определение 1. *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе с n степенями свободы, называется разбиение фазового многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня n независимых интегралов системы.

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоёв, являющихся n-мерными торами (торами Лиувилля) и составляющих множество полной меры на M^{2n}, и особых слоёв, заполняющих множество меры нуль. В нерезонансном случае слоение Лиувилля определяется самим гамильтоновым потоком и не зависит от конкретного выбора дополнительных интегралов.

Определение 2. Две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2 с двумя степенями свободы, рассматриваемые на изоэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3, называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм Q_1^3 на Q_2^3, сохраняющий ориентацию Q_1^3 и Q_2^3, а также естественную ориентацию критических окружностей.

В случае двух степеней свободы ответ на вопрос об устройстве топологии слоения Лиувилля даётся инвариантом Фоменко-Цишанга (меченой молекулой) (см. [1], [2]). А именно, как показано А. Т. Фоменко и Х. Цишангом в [2], две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, Q_1^3) и (v_2, Q_2^3), рассматриваемые на неособых компактных связных изоэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3, лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.

В данной работе инвариант Фоменко-Цишанга вычисляется для случая Чаплыгина (см. выше). Следствием этого вычисления является следующая теорема.

Теорема 1. *На соответствующих неособых уровнях энергии системы случая Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости лиувиллево эквивалентны системам случая Эйлера в динамике твёрдого тела с неподвижной точкой.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00664a), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (проект НШ 1410.2012.1) и гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова” по договору № 11.G34.31.0054.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск, 1999.

2. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия АН СССР. 1990. Т. 54. No. 3. С. 546-575.

3. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. No. 4. С. 769-805.

4. Чаплыгин С.А. Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости // Труды отделения физических наук общества любителей естествознания. 1903. Т. 11. No. 2. С. 7-10.

5. Orel O.E., Ryabov P.E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Regular and Chaotic Dynamics. 1998. V. 3. No. 1. P. 82-91.

Слова благодарности

Автор благодарен А.Т. Фоменко, А.А. Ошемкову, А.М. Изосимову, а также всем участникам семинара “Современные геометрические методы” за внимание к работе и полезные обсуждения.