Секция «Математика и механика»

Самоаффинные выпуклые тела и полугруппы операторов с постоянным спектральным радиусом.

Войнов Андрей Сергеевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: an.voynov@gmail.com

Выпуклый компакт полной размерности X в $\mathbb{R}^d$ называется *самоаффинным*, если он допускает разбиение на свои аффинные копии с непересекающимися внутренностями. Другими словами, существует набор аффинных операторов $A_1, \ldots, A_m$ таких, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i X$ и все образы пересекаются только по границам. Под телом будем везде подразумевать выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$ с непустой внутренностью. Самоаффинные тела возникают, например, при изучении функциональных уравнений со сжатием аргумента в качестве областей определения возможных решений. Интересно, что для изучения самоаффинных тел также можно использовать данные функциональные уравнения. Анализируя спектральные свойства операторов самоподобия $A_1, \ldots, A_m$ и полугруппы по умножению, порожденной ими, можно делать выводы и о геометрических свойствах самоаффинного тела X. При классификации самоаффинных компактов важную роль играют так называемые дробящиеся самоаффинные тела. Самоаффинное тело $X = \bigcup A_i X$ называется *дробящимся*, если образ X под действием полугруппы, порожденной операторами самоподобия, может иметь сколь угодно малый диаметр. Можно показать, что все дробящиеся тела – многогранники. Основным результатом является следующая теорема о структуре самоаффинных тел.

Теорема 1 *Дано недробящееся самоаффинное тело X в $\mathbb{R}^d$ с набором операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Тогда существует инвариантное относительно этих операторов аффинное подпространство L, $1 \leqslant \dim L \leqslant d-1$, пересекающееся с X по множеству X' размерности $\dim L$; при этом тело X' – дробящееся. Кроме того, все собственные значения линейной части произвольного оператора из $\bar{\mathcal{A}}$, соответствующие собственным векторам и подпространствам, не лежащим в линейной части L, по модулю равны 1.*

При помощи этой теоремы, в частности, удается привести полное описание всех самоаффинных тел в $\mathbb{R}^3$. Стоит отметить, что во всех задачах не рассматривается вопрос о классификации самоаффинных дробящихся многогранников, полное описание которых не известно даже на плоскости.