Секция «Математика и механика»

Усреднение дифференциального оператора второго порядка с узким потенциалом

Гадыльшин Т.Р.[1]***, Хуснуллин И.Х.***[2]

1 - Уфимский государственный авиационный технический университет, общенаучный, 2 - Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Физико-математический факультет, Уфа, Россия

E-mail: gtimr@yandex.ru

В работе [1] было показано, что собственные значения краевой задачи

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi_\varepsilon := -(k\psi_\varepsilon')' + (q+\mu^{-1}Q_\varepsilon)\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x\in(a,b), \qquad \psi_\varepsilon(a)=\psi_\varepsilon(b)=0,$$

где k, $q\in C^\infty[a,b]$, k, $q>0$, $Q_\varepsilon(x)=Q\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$, $x_0\in(a,b)$, $Q\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$, $0<\varepsilon\ll 1$, $\mu=\varepsilon^\alpha$, $\alpha<1$, сходятся к собственным значениям краевой задачи

$$H_0\psi_0 := -(k\psi_0')' + q\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x\in(a,b), \qquad \psi_0(a)=\psi_0(b)=0.$$

Доказательстве существенно опиралось на ограниченность интервала (a,b).

В настоящей работе рассматриваются ограниченные снизу самосопряженные операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ в $L_2(a,b)$, ассоциированные с полуторалинейными формами

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_0[u,v] &= (ku',v')_{L_2(a,b)} + (qu,v)_{L_2(a,b)}\,,\\ \mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[u,v] &= \mathfrak{h}_0[u,v] + \mu^{-1}(Q_\varepsilon u,v)_{L_2(a,b)}\,,\end{aligned}$$

где $k(x)$, $q(x)\geqslant\varkappa>0$ — локально интегрируемые функции на (a,b), а Q — функция из $L_\infty(a,b)$ с ограниченным носителем. Формы $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ рассматриваются на множестве всех функций из $L_2(a,b)$, для которых их значения определены. Причем, не предполагается, что (a,b) — только конечный интервал.

В случае, когда k, q, Q — достаточно гладкие функции, а $(a,b)\neq(-\infty,\infty)$, операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ являются расширениями по Фридрихсу задач Неймана на (a,b) для дифференциальных выражений H_0, $H_{\mu,\varepsilon}$ соответственно.

В работе доказана

Теорема. *Пусть $\varepsilon\mu^{-1}=o(1)$, а λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$. Тогда к нему сходится единственное и, к тому же, простое собственное значение $\lambda_{\mu,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, а для соответствующих собственных функций (нормированных в $L_2(a,b)$) имеет место сходимость $\psi_{\mu,\varepsilon}\to\psi_0$.*

Литература

1. Хуснуллин И.Х. Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Том 50. 2010. No. 4. С. 679–698.

Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (12-01-00445)