

## Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

### Оптимизация граничных управлений колебаниями в составном стержне

*Рогожников Алексей Михайлович*

*Студент*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет  
вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*

*E-mail: alex.rogozhnikov@yandex.ru*

В работе рассмотрены продольные колебания стержня, состоящего из  $n$  участков с разными характеристиками. Расположим стержень на прямой и обозначим концы участков через  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  таким образом, чтобы  $i$ -тый участок находился на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$   $i = 1, 2, \dots, n$ . На каждом участке стержень имеет постоянные характеристики: линейную плотность  $\rho_i$ , модуль Юнга  $k_i$  и скорость распространения волн  $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ . Актуальной задачей является управление колебаниями, что подразумевает нахождение граничных управлений  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$ , переводящих систему из состояния покоя в состояние

$$u(x, T) = \phi(x) \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad (1)$$

за конечный промежуток времени  $T$ . В силу того, что при достаточно большом значении  $T$  такое управление неединственно, возникает вопрос о нахождении оптимального. В настоящей работе ищется управление, минимизирующее граничную энергию, задаваемую следующим выражением

$$\int_0^T (\mu'(\tau))^2 + (\nu'(\tau))^2 d\tau$$

когда управление производится с обоих концов, и следующим

$$\int_0^T (\mu'(\tau))^2 d\tau$$

когда управление происходит с левого конца, а правый закреплен:  $\nu(t) \equiv 0$ . Известно (см. [4]), что задача точного управления может быть решена для дискретной аппроксимации волнового уравнения, однако даже в самых простых случаях управление расходуется при уменьшении сетки. Причиной этого является плохое приближение численными схемами высоких гармоник решения. В качестве решения обычно предлагается перейти к приближенному управлению, когда в конечный момент времени условия (1) выполняются лишь приближенно. В работе [5] был установлен явный вид решения смешанной начально-краевой задачи, в которой управляемый с обоих концов смещениями  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  стержень изначально покоился. Наложив дополнительное требование, чтобы время прохождения волны по каждому из участков стержня было одинаковым, удалось при помощи имеющегося решения получить аналитический вид оптимальных решений задач граничного управления с обоих концов и управления только с левого конца. Важно отметить, что к этому случаю сводится ситуация, когда отношение между длинами любых двух участков является рациональным числом.

### Литература

1. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН, 60:6(366) (2005), С. 89–114.
2. В. А. Ильин, О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 435, №6. С. 732–735.
3. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 417, №2. С. 160–166.
4. Zuazua E. Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-D wave equation // Rendiconti di Matematica, Serie VIII, 2004, vol. 24, P. 201–237
5. А. М. Рогожников, Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами. // Доклады Академии Наук, 2012, Т. 444, №5, С. 488–491