Секция «Математика и механика»

Об асимптотике склеивающихся потоков Харриса

Шамов Александр Александрович
Студент
КНУ им. Т. Шевченко, мехмат, Киев, Украина
E-mail: trefoils@gmail.com

Основным объектом исследования в нашей работе является асимптотическое поведение склеивающегося стохастического потока отображений в $\mathbb{R}$. По определению, $(X(u,t), u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+)$ называется потоком Харриса, если

1. для каждого $u \in \mathbb{R}$ $X(u, \cdot)$ — броуновское движение, стартующее из точки u относительно общей фильтрации;
2. $d\left\langle X(u,t), X(v,t)\right\rangle = \varphi(X(u,t) - X(v,t))dt$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — процесс квадратической ковариации;
3. X монотонно по u для каждого t.

Здесь предполагается, что φ — это вещественная положительно определенная функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица вне 0 и монотонная в односторонней окрестности нуля. Основной интерес представляет случай, когда φ не дифференцируема или даже разрывна в нуле. Не ограничивая общности, предполагаем, что $\varphi(0) = 1$.

Основной задачей является изучение асимптотического поведения процесса

$$\sup_{u\in[0,1]} |X(u,t) - u|$$

при $t \to 0$. Одним из важных примеров потока Харриса является поток Арратья, отвечающий случаю $\varphi(x) = 0, x \neq 0$. В этом случае искомая асимптотика имеет вид

$$\limsup_{t\to 0} \sup_{u\in[0,1]} \frac{|X(u,t) - u|}{\sqrt{t \ln t^{-1}}} = 1.$$

С другой стороны, если функция φ достаточно гладкая — в частности, если X является решением стохастического дифференциального уравнения в смысле Куниты [1], то имеет место закон повторного логарифма:

$$\limsup_{t\to 0} \sup_{u\in[0,1]} \frac{|X(u,t) - u|}{\sqrt{2t \ln\ln t^{-1}}} = 1.$$

Нами получены аналогичные результаты для потоков Харриса достаточно общего вида [2].

Результат работы формулируется в терминах сравнения X с гауссовским мартингалом $(Y(u,t))$ с ковариацией $d\left\langle Y(u,t), Y(v,t)\right\rangle = \varphi(u - v)dt$. Утверждается, что

$$\sup_{u\in[0,1]} |X(u,t) - u| = E(t) + \mathrm{O}\left(\sqrt{t \ln\ln t^{-1}}\right),$$

где $E(t) = \mathsf{E}\sup_{0\le k\le 1/\sqrt{t}}|Y(k\sqrt{t}, t) - k\sqrt{t}|$. Таким образом, если $E(t) \gg \sqrt{t\ln\ln t^{-1}}$, то задача сводится к оценке $E(t)$ с помощью известных методов теории гауссовских процессов.

Литература

1. Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge Univ. Press, 1990

2. Shamov A. Short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // Communications on Stochastic Analysis, Vol. 5, No. 3 (2011), pp. 527-539