Секция «Математика и механика»

О частичных булевых функциях с максимальной сложностью тестирования на константные неисправности

Икрамов Алишер Акрамович

Студент

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Ташкенте, Факультет прикладной математики и информатики, Ташкент, Узбекистан

E-mail: melan44@mail.ru

Определение. Частичной булевой функцией от n переменных назовем отображение $f\colon E_2^n \to \{0,1,*\}$. Множество всех частичных булевых функций обозначим $P_2'(n)$.

Определение. Константной неисправностью [1] называется замена значений подмножества X^n на константы, не изменяющиеся при различных интерпретациях. В случае, если производится замена только одной переменной, обозначим класс таких неисправностей через $C(1)$. В индексе множество значений констант (C_0, C_1).

Определение. Тестом функции f на класс неисправностей K назовём $T_{f,K} \subset E_2^n\colon \forall \phi \in K \quad \exists \tilde{\alpha} \in T_{f,K} \quad f(\tilde{\alpha}) \neq f(\phi(\tilde{\alpha}))$. Обозначим $L(f,K) = \min_{T_{f,K}} |T_{f,K}|$.

Введём графовую модель функции. В качестве вершин булевы наборы. Ориентированное ребро $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ принадлежит орграфу, если $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}$ и $||\tilde{\alpha}|| = ||\tilde{\beta}|| + 1$. Каждому ребру $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ припишем вес $h_f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta}))$. Мерой вершины назовём арифметическую сумму весов рёбер, исходящих из неё: $\mu_f(\tilde{\alpha}) = \sum_{\tilde{\beta} \in E_2^n} h_f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Теорема 1. *$f \in P_2'(n)$. $L(f, C_0(1)) = n \iff$*
$\forall \tilde{\beta} \in E_2^n \quad \mu_f(\tilde{\beta}) \leq 1$ и у f нет фиктивных переменных. (1)

Лемма 1. *Пусть $f \in P_2'(n)$ удовлетворяет условию (1). Пусть $\tilde{\alpha}$ – максимальный элемент какого-то подкуба. Тогда $\exists \tilde{\beta}$ в первом слое этого подкуба и цепь $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ в этом подкубе, что $\forall \tilde{\gamma} \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) f(\tilde{\gamma}) = f(\tilde{\alpha})$.*

Лемма 2. *Пусть$f \in P_2'(n)$ удовлетворяет условию (1) и в подкубе на всех слоях, больше k, значения функции f равны a. Тогда в слое k этого подкуба не более одного набора, на котором f принимает значение, отличное от a.*

Теорема 2. *Пусть $f \in P_2'(n)$ удовлетворяет условию (1). Тогда $\exists i \in [1, \ldots, n]\colon \forall \tilde{\alpha} \in E_2^n \quad (\tilde{\alpha}_i = 1) \Rightarrow (f(\tilde{\alpha}) = f(1, \ldots, 1))$*

Пусть $f \in P_2'(n-1)$. Тогда определим функцию g от n переменных следующим образом: на подкубе, где $x_n = 0$, g будет принимать значения f, а на подкубе, где $x_n = 1$, g будет константой. Так как внутри верхнего подкуба мера новой функции равна 0, а между набором верхнего и нижним подкубом есть всего одно ребро, что не противоречит условию (1). Обозначим мощность множества функций из $P_2'(n)$, удовлетворяющих условию (1) через $T'(n)$, а для$P_2(n)$ через $T(n)$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 3.$T'(n) = 3\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} T'(n-k); \quad T(n) = 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} T(n-k)$.

Верны следующие асимптотические формулы:

Теорема 4.$T'(n) \approx \frac{n!}{(\ln 3 - \ln 2)^{n+1}}; \quad T(n) \approx (\log_2 e)^{n+1} n!$

Замечание. По принципу двойственности теоремы верны и для $C_1(1)$.

Теорема 5.$\forall n \geq 3 \quad \nexists f \in P_2'(n)\colon L(f, C_0(1)) = L(f, C_1(1)) = n$.

Литература

1. В.Б. Кудрявцев, Э.Э. Гасанов, О.А. Долотова, Г.Р. Погосян. Теория тестирования логических устройств. М.: Физматлит, 2006

Слова благодарности

Благодарю своего научного руководителя В.Б. Кудрявцева за помощь в работе.