Секция «Математика и механика»

Обобщение теоремы Хенкина на случай k-значных логик.

Боков Григорий Владимирович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: bokovgrigoriy@gmail.com

В 1949 г. Л. Хенкин [3] показал, что каждая двузначная логика, содержащая классическую импликацию, конечно-порождена относительной операции modus ponens: если выводимо A и $A \to B$, то B выводимо. В данной работе доказывается, что, если обобщить понятие импликации, то результат Л. Хенкина остается верным и для k-значных логик.

Рассмотрим множество $E_k = \{0, ..., k-1\}$, которое будем интерпретировать, как множество значений, которые могут принимать высказывания. Пусть T, $\mathrm{F} \subseteq E_k$ такие, что $E_k = \mathrm{T} \cup \mathrm{F}$ и $\mathrm{T} \cap \mathrm{F} = \emptyset$, тогда множество T, будем интерпретировать, как множество истинных значений, а множество F — как множество ложный значений. Данное разбиение будем называть истинностным разбиением множества E_k.

Через P_k обозначим множество функций k-значной логики [2]. Функцию $f(x_1, ..., x_n, y) \in P_k$ будем называть импликативной относительно пары (T, F), если $f(\mathfrak{t}_1, ..., \mathfrak{t}_n, \mathfrak{f}) \in \mathrm{F}$, где $\mathfrak{t}_i$ и $\mathfrak{f}$ произвольные элементы из T и F соответственно, и на остальных наборах она принимает значения из множества T. Пусть $\Sigma \subseteq P_k$ конечное множество функций. Обозначим через Φ множество всех формул над связками Σ. Каждой формуле F из Φ можно сопоставить функцию из P_k [2], которую будем обозначать через f_F. Формулу F из Φ будем называть тавтологией, если $f_F(i_1, ..., i_m) \in \mathrm{T}$, при любых значениях $i_1, ..., i_m$ из E_k. Обозначим через Th множество всех тавтологий в Φ.

Предположим, что из множества Σ выразима импликативная относительно пары (T, F) функция. Обозначим формулу, задающую эту функцию, через $x_1 ... x_n \to y$. Тогда на множестве Th можно определить обобщенную операцию modus ponens, которая множеству формул $A_1, ..., A_n$ и $A_1 ... A_n \to B$ сопоставляет формулу B. При этом, если формулы $A_1, ..., A_n$ и $A_1 ... A_n \to B$ — тавтологии, то формула B также тавтология. Множество Th вместе с данной операцией и операцией подстановки [1] образует исчисление высказываний. Следующая теорема показывает, что каждое такое исчисление конечно-порождено.

Теорема 1 *Пусть* (T, F) *— истинностное разбиение множества* E_k*, а* Σ *— конечное множество функций из* P_k*, из которых выразима импликативная относительно* (T, F) *функция. Тогда множество* Th *конечно-порождено.*

Литература

1. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., Наука, 1986.
3. Henkin L. Fragments of the propositional calculus // J. Symb.Logic, 14 (1949), 42-82.