Секция «Математика и механика»

Предельное распределение нормированной случайной величины, характеризующей время жизни частицы при случайном блуждании.

Гусак Ю.В.[1]***, Насыров И.В.***[2]

1 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2 - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: jul_gusak@mail.ru

Рассмотрим случайное блуждание в полосе шириной n с отражающим экраном (определенным как в [1]) на уровне $Y = 0$ и поглощающим на уровне $Y = n$. Начальное положение частицы $Y = x$, $0 < x \le n$. Обозначим за $\tau(x)$ время жизни частицы, т.е. время до поглощения. И за $m(x)$ среднее значение времени жизни. Целью нашей работы является определение вида предельного распределения случайной величины $\frac{\tau(x)}{m(x)}$.

Время до поглощения можно интерпретировать, как время до начала выплаты дивидендов, при условии оплаты акционерами подъемного капитала в момент разорения. Пусть S_t^x — положение частицы в момент времени t. Тогда $S_t^x = x + \sum_{k=1}^{t} \xi_k$, где ξ_k принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями соответственно p_x, q_x, r_x, где

$$p_x = \begin{cases} p, 1 \leqslant\ x \leqslant\ n-1; \\ 0, x = n. \end{cases}$$

$$q_x = \begin{cases} q, 2 \leqslant\ x \leqslant\ n-1; \\ 0, x = 1, \text{ x} = n. \end{cases}$$

$$r_x = \begin{cases} r, 2 \leqslant\ x \leqslant\ n-1; \\ q + r, x = 1; \\ 1, x = n. \end{cases}$$

Основные этапы нахождения предельного распределения $\frac{\tau(x)}{m(x)}$.

1. Вывод рекуррентной формулы для $m(x)$. Получение явного вида $m(x)$, учитывая граничное условие $m(n) = 0$.

Лемма:

Верно утверждение:

$$m(x) = \frac{pq\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-1} + n - x\right)}{(p-q)^2}, \text{ при } p \neq\ q.$$

$$m(x) = \frac{x+n-5}{2p}(n-x), \text{ при } p = q.$$

2. Вывод производящей функции $P_x(z)$ случайной величины $\tau(x)$ с помощью метода разностных уравнений, полученной рекуррентной формулы

$$P_x(z) = z(P_{x+1}(z)p_x + P_{x-1}(z)q_x + P_x(z)r_x), 1 \leqslant x < n$$

и граничного условия $P_n(z) = 1$.
3. Определение предельного распределения случайной величины $\frac{\tau(x)}{m(x)}$, исходя из вида её преобразования Лапласа.

Литература

1. *Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.М.:ЛИБРОКОМ, 2010, 528с.*

Слова благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность научному руководителю Е.В. Булинской.