

Секция «Математика и механика»

Некоторые свойства выпуклой оболочки случайного графа на сфере

Дугалов Ержан

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: olzhabala@gmail.com

Рассмотрим пуассоновский процесс P_λ интенсивности λ на единичной двумерной сфере

$$S^2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\}.$$

Каждая точка процесса соединяется с K ближайшими точками процесса. При этом интенсивность λ процесса возрастает. Вопрос: как же должно зависеть K от λ , чтобы граф получился связным? Ответ дается в теореме 3.

Рассмотрим выпуклую оболочку P_λ . Пусть F — грань этой выпуклой оболочки. Тогда F имеет описанную окружность $\omega(F) \subset S^2$. Назовем *шапкой* $C(F)$ ту из двух частей, на которые ω делит S^2 , в которой нет точек P_λ , отличных от вершин F .

Назовем *плохой* пару (x, F) , где x — точка P_λ , F — грань выпуклой оболочки с вершиной x , если она удовлетворяет условиям:

1. Шапка $C(F)$ занимает меньше полусферы.
2. Наименьший круг на S^2 с центром x и содержащий $C(F)$ содержит не менее $k + 3$ точек.

Утверждение 1.

$$EN = \frac{1}{2} \int_{(S^2)^3} \lambda^3 dx \left(e^{-\lambda G(x)} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{(\lambda h(G(x)))^j}{j!} e^{-\lambda h(G(x))} \right) \right).$$

Утверждение 2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{(S^2)^3} \lambda^3 dx \left(e^{-\lambda G(x)} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{(\lambda h(G(x)))^j}{j!} e^{-\lambda h(G(x))} \right) \right) = \\ = \int_0^{\infty} \lambda^3 dM(t) \left(e^{-\lambda t} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{(\lambda h(t))^j}{j!} e^{-\lambda h(t)} \right) \right). \end{aligned}$$

Утверждение 3. Пусть 1-остов выпуклой оболочки многогранника P , вписанного в S^2 , не содержится в k -близостном графе для вершин P . Тогда существует плохая конфигурация из вершин P .

Доказательство этого факта довольно очевидно.

Теорема 3. Существует $c_1 > 0$ такое, что если $k(\lambda) > c_1 \ln \lambda$, то вероятность того, что 1-остов выпуклой оболочки P_λ содержится в k -близостном графе, стремится к 1 при $\lambda \rightarrow \infty$.

Литература

1. Bollobas "Random Graphs and Geometry"
2. А. Magazinov , Архив, 2010

Слова благодарности

Огромное спасибо А. Магазинову за замечания, сделанные по ходу написания работы