Секция «Математика и механика»

Классификация выпуклых n-угольников

Ишанкулова Ю.В.[1]***, Токмакова А.Ю.***[2]
1 - МОУ лицей №2, , 2 - МОУ лицей №2, , Волгоград, Россия
E-mail: julia-ish@mail.ru

Выпуклый многоугольник, разбиение которого мы будем изучать, назовем *исходным.* Число сторон исходного многоугольника обозначим через n. Многоугольники, на которые разбивается исходный многоугольник своими диагоналями, будем называть *элементарными.* Назовем выпуклый многоугольник *ординарным*, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке внутри многоугольника. В противном случае будем называть многоугольник *особенным.* Точку внутри особенного многоугольника, в которой пересекаются $k+2$ диагоналей, будем называть *особенностью* или *полюсом* порядка k. Очевидно, что порядок особенности не может быть больше $\frac{n}{2}-2$.

Пусть $n>6$. Количество особенностей порядка k будем обозначать через s_k. Упорядоченный набор $c=(s_1,s_2,\ldots,s_m)$ назовем характеристическим вектором исходного многоугольника.

Поставим в соответствие каждому выпуклому многоугольнику несколько графов, которые будем называть *сопутствующими* графами этого многоугольника. Вершинами графа (назовем его *структурным графом* исходного многоугольника) будут вершины и точки пересечения диагоналей исходного многоугольника, а ребрам соответствуют стороны исходного многоугольника и отрезки диагоналей, на которые они разбиваются точками пересечения. Ясно, что структурный граф многоугольника является планарным. Каждая плоская укладка планарного графа порождает граф геометрически двойственный исходному. Граф, геометрически двойственный структурному графу многоугольника, назовем *двойственным* или *дуальным* графом исходного многоугольника. Вершинами дуального графа будут грани плоской укладки структурного графа, то есть элементарные многоугольники плюс внешняя n-угольная грань. Две вершины дуального графа смежны, если соответствующие грани имеют общее граничное ребро.

Каждый из графов, сопоставленных любому выпуклому многоугольнику, очевидно планарен и связен. В то же время, другие важные характеристики сопутствующих графов могут варьироваться. Именно на этой вариативности и основаны предлагаемые нами подходы к классификации выпуклых многоугольников. Из многочисленных возможных характеристик графов предпочтение отдавалось наиболее существенным, имеющим наглядную геометрическую интерпретацию и естественно описываемым в терминах исходного многоугольника. В качестве таких характеристик мы рассматривали количества вершин и ребер, мультимножества степеней вершин каждого из графов связанных с многоугольником, а также изоморфизм графов.

Выпуклые n-угольники, структурные графы которых имеют поровну вершин, будем называть *равнопересеченными.* Число вершин структурного графа с характеристическим вектором с равно (2), где (1) - число вершин структурного графа ординарного n-угольника.

Выпуклые n-угольники, структурные (а значит и двойственные) графы которых имеют поровну ребер, будем называть *равнореберными.* Формула для подсчета количества ребер структурного (двойственного) графа выпуклого многоугольника с характеристическим вектором с имеет вид (4), где (3) - число ребер структурного графа ординарного n-угольника.

Выпуклые n-угольники, двойственные графы которых имеют поровну вершин (а структурные – поровну граней в плоской укладке), будем называть *равногранными*. Число вершин двойственного графа выпуклого n-угольника с характеристическим вектором с подсчитывается по формуле: (6), где - (5) число вершин двойственного графа ординарного n-угольника.

Выпуклые n-угольники, у которых совпадают любые две (а значит, в силу соотношения Эйлера, и все три) рассмотренные выше характеристики, назовем изопараметрическими.

Мультимножество степеней вершин структурного графа выпуклого многоугольника вполне определено его характеристическим вектором. Два выпуклых n-угольника назовем *изополярными*, если их характеристические векторы равны.

Два выпуклых n-угольника назовем *однотипными*, если равны мультимножества степеней вершин их двойственных графов. Ясно, что в разбиении однотипных многоугольников диагоналями присутствует поровну треугольников, поровну четырехугольников и т.д.

Наиболее детальную классификацию выпуклых многоугольников в терминах сопутствующих графов можно получить, положив в основу классификации изоморфизм этих графов. Известно, что геометрически двойственные графы изоморфных связных планарных графов могут, вообще говоря, быть не изоморфны. Однако в интересующем нас случае такая ситуация невозможна: изоморфизм структурных графов влечет за собой изоморфизм дуальных, и обратно. Два выпуклых многоугольника будем называть *изотопными,* если изоморфны их структурные (двойственные) графы.

Очевидно, что каждое из рассмотренных нами отношений является отношением эквивалентности на множестве выпуклых n-угольников.

Рассмотренные нами различные классификации выпуклых многоугольников не являются независимыми. На рисунке 1 представлена схема логической зависимости рассматриваемых классификаций.

Нами обоснованы все связи, отмеченные на рис. 1 и доказано отсутствие иных попарных зависимостей. Наиболее сложным оказалось построение однотипных, но не изополярных многоугольников.

Каждая из рассмотренных нами классификаций приводит к разбиению выпуклых n-угольников на конечное число классов при каждом конкретном значении n. При $n \leqslant 5$ все классификации тривиальны. Выпуклые шестиугольники разбиваются на два класса, независимо от того, какую именно классификацию мы рассматриваем. Один класс составляют ординарные шестиугольники, а другой – особенные. Нами найдены числа классов для каждой из рассмотренных нами классификаций при n, равных 7 и 8. Исключениями являются числа классов изотопных и однотипных восьмиугольников.

При малых n рассматриваемые нами отношения нередко приводят к совпадающим разбиениям. В то же время, начиная с $n = 9$, любые два из введенных отношений приводят к различным разбиениям. Задача отыскания точного числа классов выпуклых n-угольников с ростом n становится весьма сложной для каждой из рассматриваемых классификаций. Подтверждением этого тезиса может служить тот факт, что даже для правильных n-угольников полное описание характеристического вектора для произвольного n было получено относительно недавно, в 1998 году.

$$v_0 = n + C_n^4 = \frac{n(n+1)(n^2-7n+18)}{24} \tag{1}$$

$$v(n,\chi) = v_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k k(k+3) \tag{2}$$

$$e_0 = 2C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} + n = \frac{n(n-1)(n^2-5n+12)}{12} \tag{3}$$

$$e(n,\chi) = e_0(n) - \sum_{k=1}^{m} s_k k(k+2) \tag{4}$$

$$f_0(n) = 1 + c_0(n) + v_0(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24} \tag{5}$$

Литература

1. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов – М.: Наука, 1990.
2. Лецко В.А. Комбинаторика выпуклого многоугольника – Потенциал, №3 (2010), с. 49-54
3. Зыков А.А. Основы теории графов – М.: Наука, 1987.
4. Математический марафон – http://www-old.fizmat.vspu.ru/doku.php?id=marathon:about [7.07.2010]
5. B. Poonen, M. Rubinstein. The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon – SIAM J. on Discrete Mathematics, Vol. 11, No. 1 (1998), p. 135-156

Иллюстрации

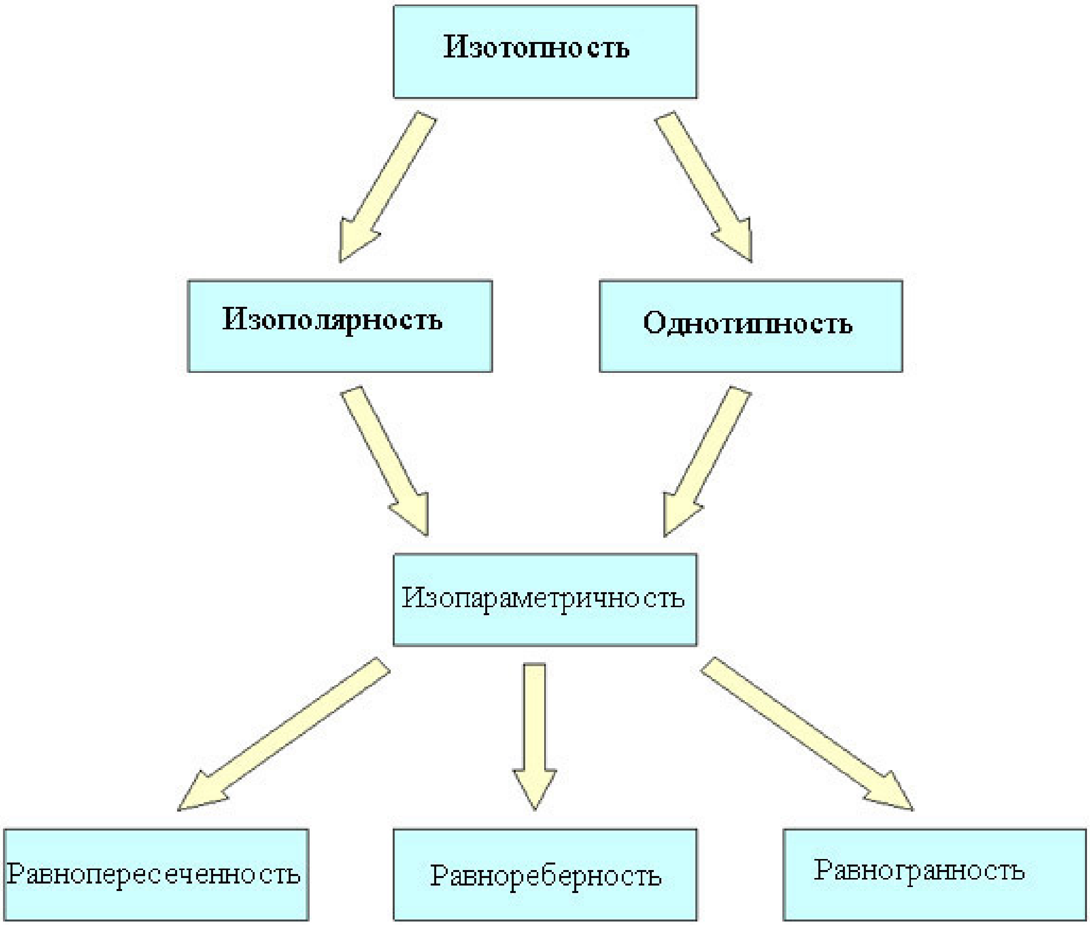

Рис. 4.

Рис. 1: Логическая зависимость между предложенными классификациями