Секция «Математика и механика»

О некоторых свойствах сигнатуры и закрученности как псевдохарактеров групп кос

Шастин Владимир Алексеевич
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Черноголовка, Россия
E-mail: shast.fds@mail.ru

Для произвольной группы G существует класс отображений $\chi : G \to \mathbb{R}$, называемых квазихарактерами, которые удовлетворяют следующему условию

$$C_\chi = \sup_{g,h \in G} |\chi(gh) - \chi(g) - \chi(h)|,$$

где величина C_χ, называемая *дефектом* данного квазихарактера, конечна. Квазихарактер χ называется *псевдохарактером*, если

$$\chi(g^k) = k \cdot \chi(g)$$

для всех $g \in G$, $k \in \mathbb{Z}$.

В работе [1] А. Малютин определил псевдохарактер на группах кос B_n, называемый закрученностью косы, и показал, что если на косе β закрученность принимает значение большее 1, то зацепление, представленное замыканием данной косы, является простым. Впоследствии выяснилось, что подобным образом указывает на простоту зацеплений и другие псевдохарактеры. В работе [2] А. Малютин ввел понятие ядерного псевдохарактера и доказал следующую теорему:

Теорема 1. Пусть $n \geqslant 3$ и пусть $\varphi : B_n \to \mathbb{R}$ — ядерный псевдохарактер с дефектом C_φ. Пусть $\beta \in B_n$ и пусть $|\varphi(\beta)| > C_\varphi$. Тогда коса β представляет простое (т.е. нетривиальное, несоставное и нерасщепимое) зацепление [в частности, если β представляет узел, то этот узел простой].

Другие примеры квазихарактеров на группах кос дают инварианты зацеплений. В работе [4] J.-M. Gambaudo и É. Ghys доказали, что сигнатура косы β, определяемая как сигнатура ориентированного зацепления, полученного замыканием β, является квазихарактером на B_n, который мы будем обозначать sign_n.

Легко показать, что любой квазихарактер χ на произвольной группе G единственным образом представляется в виде суммы псевдохарактера, мы будем обозначать его $\overline{\chi}$, и функции, ограниченной по абсолютной величине дефектом C_χ. В работе [4] доказано, что $\overline{\mathrm{sign}_3}$ представляется в виде линейной комбинации закрученности и экспонециальной суммы - единственного, с точностью до умножения на вещественное число, гомоморфизма из B_n в группу $\mathbb{R}$ вещественных чисел по сложению.

В работе [3] А. Малютин определил операторы $R_n : X_{n-1} \to X_n$, где символом X_n обозначено пространство псевдохарактеров группы кос B_n, используя которые можно строить новые псевдохарактеры групп кос из уже имеющихся. В частности, применяя операторы к закрученностям и псевдохарактерам, отвечающим сигнатуре, можно получить некоторый класс псевдохарактеров, которые естественно назвать псевдохарактерами типа закрученности и типа сигнатуры соответственно. В своей работе [3] А. Малютин поставил задачу проверить, существуют ли нетривиальные линейные зависимости, отличные от приведенной в работе [4], между псевдохарактерами типа закрученности и типа сигнатуры. Мы даем частичное решение этой задачи, доказывая следующую теорему:

Теорема 2. При $n \geqslant 5$ псевдохарактер $\overline{\mathrm{sign}}_n$ линейно независим от экспонециальной суммы и всех псевдохарактеров типа закрученности.

В той же работе [3] А. Малютин показал, что любой псевдохарактер ψ на группе кос B_n единственным образом представляется в виде линейной комбинации ядерного псевдохарактера, называемого ядерной составляющей χ, и псевдохарактера $R_n(\varphi)$, где φ – псевдохарактер на B_{n-1}. Закрученность является ядерным псевдохарактером. Что можно сказать о ядерной составляющей псевдохарактеров $\overline{\mathrm{sign}}_n$? Мы доказываем следующую теорему:

Теорема 3. Псевдохарактер $\overline{\mathrm{sign}}_n$ при $n \geqslant 2$ имеет нетривиальную ядерную составляющую.

Литература

1. А. В. Малютин. Закрученность (замкнутых) кос, Алгебра и анализ, 16:5, 2004, 59-91
2. А. В. Малютин. Псевдохарактеры групп кос и простота зацеплений, Алгебра и анализ, 21:2 , 2009, 113-135
3. А. В. Малютин. Операторы пространств псевдохарактеров групп кос, Алгебра и анализ,21:2 ,2009, 136-165
4. J.-M. Gambaudo, E. Ghys. Braids and signatures, Bull. Soc. Math. France, 133:4, 2005, 541-579

Слова благодарности

Автор выражает благодарность И.А. Дынникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.