

Секция «Математика и механика»

Свойства матрицы циклов примитивного k -набора. Анализ дыр в экспоненциальном множестве в случае $n=3, k=2$.

Можеев Андрей Васильевич

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: avtokeev@gmail.com

Пусть есть k -набор $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$, в состав которого входят неотрицательные матрицы размера $n \times n$, где $A_l = (a_{ij}^l)$, $l = 1, \dots, k$. Ему соответствует ориентированный граф $D(\mathcal{A})$, раскрашенный в k цветов. Любому k -набору $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ - $n \times n$ неотрицательных матриц поставим в соответствие k -цветный ориентированный граф $D(\mathcal{A})$ с вершинами $1, 2, \dots, n$, у которого существует ребро цвета l из вершины i в вершину j тогда и только тогда, когда $a_{ij}^l \neq 0$. И наоборот, каждому k -цветному ориентированному графу D сопоставим k -набор $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ $n \times n$ - неотрицательных матриц. Пусть ω - любой цикл в графе, определим $(\#)\omega$ как $k \times 1$ вектор, у которого i координата - число ребер в ω цвета i . Положим $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_c$ - циклы в $D(\mathcal{A})$ и $C(D(\mathcal{A}))$ - $k \times c$ матрица, у которой i столбец $(\#)\gamma_i$. Матрицу $C(D(\mathcal{A}))$ будем называть матрицей циклов.

Содержание $k \times c$ матрицы M , обозначается $content(M)$, определяется нулем, если ранг M меньше k или НОД(определителей $k \times k$ миноров в M), если ранг M равен k .

В теореме 1 из статьи [1] сформулировано необходимое условие примитивности k -набора:

Теорема 1 Пусть $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ - k -набор $n \times n$ неотрицательных ненулевых матриц, и пусть $C(D(\mathcal{A}))$ - матрица циклов $D(\mathcal{A})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $D(\mathcal{A})$ - примитивный.
- (b) $D(\mathcal{A})$ сильно связный и $\langle M \rangle = \mathbb{Z}^k$.
- (c) $D(\mathcal{A})$ сильно связный и $content(M) = 1$.

В докладе продолжается исследование свойств матрицы циклов, а именно, доказывается, что матрица циклов не может быть ортогональной матрицей и не может содержать строки вида (a, \dots, a) .

Во-второй части доклада будет рассказано про случай, когда $n = 3, k = 2$. Будет доказано, что в этом случае нет дыр в экспоненциальном множестве и максимальная экспонента Виланда равняется 10.