

Секция «Математика и механика»

Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

Сорокин Константин Сергеевич

Студент

Томский государственный университет, Механико-математический факультет,

Томск, Россия

E-mail: sorokin_k@list.ru

Пусть R — кольцо с единицей, элемент a называется чистым, если $a = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R . Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент чистый. Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году [3]. Николсон доказал [3], что чистые кольца — заменяемые кольца, а значит в чистом кольце идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала. Следовательно, задача изучения кольца с помощью известных свойств его факторколец может существенно упроститься, если известно, что это чистое кольцо. Поэтому представляет интерес поиск необходимых и достаточных условий чистоты колец. Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов (смотри [2, гл.13], а также [4,5,6]).

Известно, что каждому модулю можно поставить в соответствие кольцо всех эндоморфизмов этого модуля. В некоторых случаях описание кольца эндоморфизмов модуля может помочь в изучении свойств самого модуля. Поскольку абелевы группы являются \mathbb{Z} -модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп. Согласно фактам, доказанным в [4,6], получаем, что кольцо эндоморфизмов абелевой группы является чистым тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов её редуцированной части чисто.

В результате проведённых исследований были получены результаты, дающие условия чистоты колец эндоморфизмов вполне разложимых и ограниченных абелевых групп.

Теорема 1. Если B — вполне разложимая группа с редуцированной частью A , то кольцо эндоморфизмов группы B — чистое тогда и только тогда, когда $A = \bigoplus_{p \in \Pi} (\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i^p)$, где Π — некоторое множество простых чисел, $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi, i = 1, \dots, n_p, n_p \in \mathbb{N}$), \mathbb{Q}_p — группа всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p .

Теорема 2. Кольцо эндоморфизмов ограниченной группы является чистым.

Литература

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М., 2006.
2. Туганбаев А.А. Теория колец. М., 2009.
3. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. № 229. p. 269–278.

4. Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra, V. 29. 2001. №6. p. 2589-2595.
5. Nicholson W. K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. 2004. №83. p. 340–343.
6. Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. 2006. №304. p. 94–111.

Слова благодарности

Выражаю благодарность научному руководителю Крылову Петру Андреевичу