Секция «Математика и механика»

Об асимптотическом поведении случайных сумм случайных слагаемых.

Шахгильдян Ксения Дмитриевна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: ksy-shakhgildyan@yandex.ru

Хорошо известно, что асимптотика для случайных сумм имеет широкие и важные применения в теории рисков, теории массового обслуживания, теории ветвящихся процессов. В последнее время исследователи обращали на них много внимания, и многие результаты были получены в этой области (см. [1],[2],[3]). Эти результаты обычно даются в форме серий эквивалентных условий. В этой работе докажем некоторые новые эквивалентные условия на асимптотическое поведение случайных сумм.

Пусть множество $D = (-\infty, \infty)$ или $(0, \infty)$. V - распределение на D, положим $\overline{V}(x) = V(\infty) - V(x), x \in (-\infty, \infty)$.

Для некоторого $\gamma \geq 0$, скажем, что $V \in \gimel(\gamma)$, если для некоторого достаточно большого $x, \overline{V}(x) > 0$ и $\overline{V}(x-t) \sim e^{\gamma t}\overline{V}(x)$, для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Скажем, что собственное распределение $V \in S(\gamma)$, если $V \in \gimel(\gamma)$ и $\overline{V^{*2}}(x) \sim 2M_V(\gamma)\overline{V}(x)$, где $M_V(\gamma) = \int\limits_D e^{\gamma y}V(dy) < \infty$; и скажем, что несобственное распределение $V \in S(\gamma)$, если $V/V(\infty) \in S(\gamma)$.

Пусть $\xi_i, i \geq 1$ - последовательность случайных величин с общим собственным распределением G на D, а η - неотрицательная целочисленная случайная величина с массами $p_n = P(\eta = n), n = 0, 1, 2...$, которая не зависит от $\xi_i, i \geq 1$. Мы называем $\zeta = \sum_{i=1}^{\eta} \xi_i$ случайной суммой, порожденной $\xi_i, i \geq 1$ и η. F функция распределения ζ.

ТЕОРЕМА

Пусть $G \in \gimel(\gamma)$ на D, для некоторого $\gamma \geq 0$ пусть $M_G(\gamma) < \infty$, и предположим, что

(i) $M_G(\gamma) < 1$, или

(ii) $M_G(\gamma) \geq 1$ и $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(M_G(\gamma) + \varepsilon)^n < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) $G \in S(\gamma)$;

(b) $\overline{F}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} p_n n (M_G(\gamma))^{n-1}\overline{G}(x)$.

Более того, если $\exists K$ такое, что $p_n = 0 \ \forall n > K$, тогда (a),(b) и следующее утверждение эквивалентны:

(c) $F \in S(\gamma)$.

Данная теорема является основным результатом, кроме того в работе доказывается ряд утверждений и приводятся примеры.

Литература

1. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. Физматлит, 2007.

2. Borovkov, A.A., 1976. Stochastic Process in Queueing Theory. Springer, Berlin.

3. Yuebao Wang, Yang Yang, Kaiyong Wang, Dongya Cheng, 2006. Some new equivalent conditions on asymptotics and local asymptotics for random sums and their applications. Insurance Mathematics and Economics.