Секция «Математика и механика»

Двумерные стохастические процессы обмена в расширяющихся областях

Однобоков Никита Юрьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: odnobokov@mail.ru

В работе исследуется специальный класс марковских процессов с локальным взаимодействием, представляющий интерес при моделировании ряда стохастических систем [1]. Пусть $\Pi = \{0,\ldots,N\} \times \{0,\ldots,M\}$ — дискретный прямоугольник, $\partial\Pi$ — граница Π, $\{\{z,w\} : z = (z_1,z_2), w = (w_1,w_2) \in \Pi, |z_1 - w_1| + |z_2 - w_2| = 1\}$ — множество ребер Π. Определим марковский процесс с множеством состояний $X = \{0,1\}^{\Pi}$. Зафиксируем граничные условия $\mathfrak{A} : \partial\Pi \to \{0,1\}$. Марковский процесс $(\xi_t^{\mathfrak{A}}, t \geq 0)$, соответствующий этим граничным условиям, можно задать при помощи генератора [3] или неформально описать следующим образом. На малом промежутке времени $[t, t+dt]$ на каждом из ребер независимо друг от друга могут произойти такие события:

1) Обмен значениями на концах внутренних ребер $(z, w \notin \partial\Pi)$ с вероятностью $dt + o(dt)$ $\xi_{t+dt}^{\mathfrak{A}}(z) = \xi_t^{\mathfrak{A}}(w),\ \xi_{t+dt}^{\mathfrak{A}}(w) = \xi_t^{\mathfrak{A}}(z)$;

2) Значение процесса в приграничной точке меняется на значение в соседней с ней граничной точке $(z \notin \partial\Pi, w \in \partial\Pi)$ с вероятностью $dt + o(dt)$ $\xi_{t+dt}^{\mathfrak{A}}(z) = \xi_t^{\mathfrak{A}}(w),\ \xi_{t+dt}^{\mathfrak{A}}(w) = \xi_t^{\mathfrak{A}}(w)$.

Обозначим через $\mu(z,\mathfrak{A})$ стационарную вероятность события $\{\xi_t^{\mathfrak{A}}(z) = 1\}$. В работе [3,4] они изучены в случаях M — фиксированное число, $N \to \infty$, $\frac{M}{N} \to \infty$ и $\frac{M}{N} \to 0$. Пусть $\mathfrak{A}^{[a,b]}$ — граничные условия на Π такие, что на верхней границе во всех узлах с номерами от a до b стоят единицы, а в остальных узлах граничные условия нулевые.

Пусть $(B_t^{(x,y)}, t \geq 0)$ — двумерный винеровский процесс, выходящий в момент $t = 0$ из точки (x,y), $Q = (0,1) \times (0,m_0)$, а τ — момент первого попадания процесса $B_t^{(x,y)}$ на границу Q (∂Q).

Теорема *Пусть* $\mathbf{0} \leq a \leq b \leq 1, x \in (0,1), y \in (0,m_0)$**.**

При $N, M \to \infty, \frac{M}{N} \to m_0$

$$\mu((xN, yM), \mathfrak{A}^{[aN,bN]}) \to P\left(B_\tau^{(x,y)} \in [a,b] \times \{m_0\}\right).$$

Вероятность, возникающую в пределе, можно найти из следующей теоремы.

Теорема ([2]) *Функция* $u(x,y) = P\left(B_\tau^{(x,y)} \in [a,b] \times \{m_0\}\right)$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1)$\Delta u(x,y) = 0$ *для всех* $(x,y) \in Q$;

2)$u(x,y)$ *непрерывна во всех точках* ∂Q, кроме (a,m_0) и (b,m_0).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 09-01-00761.

Литература

1. Малышев В.А., Манита А.Д., Стохастическая микромодель течения Куэтта. Теория вероятностей и ее применения, т.53, вып.4, с.798-809 (2008)

2. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А., Управляемые марковские процессы и их приложения, Наука, 1966

3. Однобоков Н.Ю., Влияние границ в стохастических процессах обмена на двумерной целочисленной решетке, Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ-2010, МАКС Пресс, 2010.

4. Однобоков Н.Ю., Влияние границ в стохастических процессах обмена на двумерной целочисленной решетке, дипломная работа, 2010, 18 стр.