## Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

# О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа

***Аристов Анатолий Игоревич***

*Соискатель*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*

*E-mail: ai_aristov@mail.ru*

Работа посвящена исследованию существования решений следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u-u-|u|^{q} u\right)+\mu(x)|u|^{r} u+f(x)=0,\ u(x,0)=u_0(x),\ \left.u(x,t)\right|_{\partial\Omega}=0$$

и нахождению оценок времени существования решений в случае локальной по времени (но не глобальной) разрешимости. Здесь $u(x,t)$ – действительнозначная функция, $t\geqslant 0$, $x\in\Omega\subset R^3$, $\Omega$ – ограниченное множество с границей $\partial\Omega\in C^{(2,\delta)}$, $\delta\in(0;1]$, $q\in(0;4]$, $r\in(1;2]$, $\mu(x)\in L_4(\Omega)$, $f(x)\in L_2(\Omega)$, $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$. Задача моделирует нестационарные процессы в полупроводниках с учетом связанных зарядов. Получают развитие идеи из [1], где исследовалась аналогичная задача для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u-u)+u^3=f(x)$.

Обобщенным решением данной задачи будем называть такое $u\in C^1\left[0;\ T;\ H_0^1(\Omega)\right)$, что $\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u-u-|u|^q u\right)+\mu|u|^r u+f,w\right\rangle=0\ \forall w\in H_0^1(\Omega),\forall t\in[0;T),\ \left.u\right|_{t=0}=u_0$.

С помощью принципа сжимающих отображений доказано следующее утверждение:

**Теорема 1.** *$\forall u_0\in H_0^1(\Omega)\ \exists T>0$ (возможно, $T=\infty$), для которого существует единственное обобщенное решение, причем если $T<\infty$, то $\lim\limits_{t\to T-}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\infty$.*

Положим $\Phi_0=\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\nabla u_0\|^2_{L_2(\Omega)}\right)+\frac{q+1}{q+2}\|u_0\|^{q+2}_{L_{q+2}(\Omega)},\alpha=\frac{r-2q-1}{2q+4}$.

С помощью энергетических оценок доказаны следующие две теоремы.

**Теорема 2.** *Если $\|\mu\|_{L_4(\Omega)}=0$, то $T=\infty$. Если $\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\neq 0$, то $T\geqslant T_1>0$ (для $T_1$ получена явная формула).*

**Теорема 3.** *Дополнительно предположим, что $\mu(x)>0$ почти всюду на $\Omega$, $0<q\leqslant 1/2$, $2q+1<r\leqslant 2$,*

$$\int\limits_\Omega \mu|u_0|^{r+2}dx+(r+2)\int\limits_\Omega fu_0dx>0$$

$$\int\limits_\Omega \mu|u_0|^{r+2}dx+\int\limits_\Omega fu_0dx>\Phi_0^{\alpha+1}\|f\|_{L_2(\Omega)}\sqrt{\frac{r+1}{\alpha}\left(\frac{\alpha+1}{e\alpha}\right)^{1+1/\alpha}}$$

*Тогда имеет место оценка $T\leqslant T_2$ (для $T_2$ получена явная формула).*

### Литература

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М., 2008.