

**Секция «Вычислительная математика и кибернетика»**

**Исследование инерционной модели распределения ресурсов между  
ассимиляторными механизмами в клетке микроба.**

**Пучкова Алёна Игоревна**

*Аспирант*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет  
вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия*

*E-mail: apuchkova@gmail.com*

Микробы усваивают питательные вещества, из которых они получают строительный материал, расходуемый в процессе роста. Строительный материал распределяется среди различных типов макромолекулярных структур. Таким образом, возникает проблема распределения ресурсов между различными молекулярными механизмами. Предполагается, что клетка микроба состоит только из двух химических элементов: углерода и азота. Считается, что клетка может синтезировать только два типа элементов механизма усвоения питательных веществ, один из которых ассимилирует питательные вещества, из которых клетка получает углерод, а другой ассимилирует питательные вещества, из которых клетка получает азот. Возникает проблема распределения строительного материала между усвоением углеродосодержащих питательных веществ и усвоением азотосодержащих питательных веществ. Возможны три варианта: клетка использует все свои запасы углерода и азота для синтеза элементов механизма усвоения питательных веществ (сбалансированный путь), имеется избыток углерода (азот-дефицитный случай), имеется избыток азота (углерод-дефицитный случай). Предполагается, что клетка стремится выйти на сбалансированный путь, где реализуется максимальная скорость её роста. Менее очевидно её поведение в условиях азот-дефицита или углерод-дефицита в предположении, что клетка старается максимизировать свою биомассу к заданному моменту времени. Цель оптимизационной задачи – нахождение оптимального поведения клетки в условиях недостатка углерода или азота.

Модель распределения ресурсов может быть описана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \omega_1 y \varphi(x), \\ \dot{x}_2 = \omega_2 (1 - y) \varphi(x), \\ \dot{y} = \frac{\dot{\varphi}(x)}{\varphi(x)} (u - y), \\ x(0) = x_0 \in R_+^2, \\ y(0) = y_0 \in [0, 1], \\ u(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(x(T)) \rightarrow \max_{u(\cdot)} \end{array} \right.$$

где  $x_1$  — количество элементов механизма усвоения питательных веществ, которое могло бы быть синтезировано микробом при переработке всего имеющегося в наличии углерода,  $x_2$  — количество элементов механизма усвоения питательных веществ, которое могло бы быть синтезировано микробом при переработке всего имеющегося в наличии

азота. Действительное количество элементов механизма усвоения, имеющееся на данный момент, соответствует меньшему из этих двух:  $\varphi(x) = \min\{x_1, x_2\}$ . Переменная  $y \in [0, 1]$  показывает, какая часть ресурсов идёт на воспроизводство элементов механизма усвоения углерода.  $u$  — это доля вновь синтезированного механизма усвоения, направленная на воспроизводство элементов механизма усвоения углерода.  $\omega_1, \omega_2$  — положительные константы, причём  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ . Рассматривается случай, когда микроб не способен достаточно быстро изменить соотношение между ассимиляторными механизмами (в противном случае  $u = y$ , задача сводится к двумерной, решение которой находится несложными рассуждениями). Такая инерционная модель характерна для прокариотических клеток.

Задача исследуется при двух режимах управления, имеющих ясную биологическую интерпретацию. Также решается задача быстрогодействия, т.е. задача скорейшего выхода на сбалансированный путь роста. Находится управление в форме синтеза и вычисляется оптимальное время перехода на сбалансированный путь.

### Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
2. Berg, H.A., Kiselev, Y.N., Kooijman, S.A.L.M., Orlov, M.V. Optimal allocation between nutrient uptake and growth in a microbial trichome // Math. Biol.. 1998, №37, p. 28-48.
3. Brock, T.D., Madigan, M.T., Martinko, J.M., Parker, J. Biology of Microorganisms. Prentice-Hall International, 1994.