Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

О факторизациях цепей

Карманова Евгения Олеговна
Аспирант
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Факультет компьютерных наук и информационных технологий, Саратов, Россия
E-mail: janekao@mail.ru

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а α — отношение на V. Множество V называется множеством вершин, отношение α — отношением смежности, а пары, входящие в α, дугами орграфа G. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Факторграфом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что факторграф G/θ является K-графом.

Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. При изображении неориентированного графа ребро изображается ненаправленной линией.

Множество вершин неориентированного графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

В [2] была представлена программа, генерирующая все конгруэнции заданной цепи и выделяющая среди них цепные конгруэнции, т. е. такие, факторграфы по которым являются цепями. При этом выдается общее число конгруэнций данной цепи и количество её цепных конгруэнций.

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он факторграфом другого заданного графа? Эта задача является NP - полной.

Неизвестно, какие графы являются факторграфами m-реберной цепи P_m.

Частичным продвижением в этом направлении является следующая

Теорема 1. Любой связный граф с m ребрами является факторграфом цепи P_{2m-1}.

Еще одна открытая проблема: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, факторграфом которой является G.

Получены следующие результаты.

Теорема 2. Если T - дерево с m ребрами, имеющее диаметр d, то $p(T) = 2m - d$.

Теорема 3. Для связного графа G с m ребрами $m \leq p(G) \leq 2m - 2$.

Литература

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. - М.: Наука. Физматлит, 1997.

2. Карманова Е.О. О конгруэнциях цепей и циклов//Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. Саратов, 1 июля 2010 г. - Саратов: Изд-во СГУ, 2010. - С. 70-74.