Асимптотика спектра и формула следа оператора второго порядка с несуммируемым коэффициентом

***Тулькубаев Ринат Закирович*[1]**

аспирант

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

E-mail: RinatTulkubaev@pochta.ru

В $L^2[0,\pi]$ изучается спектральная задача

$$-u''(r)+V(r)u(r)=\lambda u(r), \qquad (1)$$

$$u(0)=u(\pi)=0, \qquad (2)$$

где $V(r)$ удовлетворяет условию $\int_0^\pi r(\pi-r)|V(r)|dr<\infty$. Ранее в случае $V(r)\in L[0,\pi]$ аналогичная задача с помощью тонкого анализа системы первого порядка изучалась в работах [1], [2]. Мы используем методику предложенную Х.Х.Муртазиным в работах [3], [4], и доказываем, что имеет место

Теорема 1. Спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1)-(2) имеет асимптотику $\lambda_n=n^2+(Vf_n,f_n)+\alpha_n$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L^2[0,\pi]$, $f_n(r)=\sqrt{2/\pi}\sin nr$, $\alpha_n=\overline{o}(n)$, для $n>>1$ спектр определяется из уравнения $\lambda=\Phi_n(\lambda)$, где сжимающая функция $\Phi_n(\lambda)=n^2+(Vf_n,f_n)-(VR_n(\lambda)Vf_n,f_n)$, а оператор $R_n(\lambda)$ определяется из уравнения $R_n(\lambda)+R_{0n}(\lambda)VR_n(\lambda)=R_{0n}(\lambda)$, $R_{0n}(\lambda)$ - интегральный оператор, ядро $R_{0n}(r,t,\lambda)$ которого равно $R_{0n}(r,t,\lambda)=\sum_{k\neq n}(k^2-\lambda)^{-1}\sin kr\sin kt$.

При более жестких ограничениях на $V(r)$, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $\int_0^\pi r^\varepsilon(\pi-r)^\varepsilon|V(r)|dr<\infty$, $0<\varepsilon<1$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}[n^2+\beta_n-\lambda_n]=0$, где ряд сходится абсолютно, числа β_n равны $\beta_n=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\oint_{|z-n^2|=\delta n} z\cdot sp[R_0(z)V]^k R_0(z)dz$, $\delta>0$ - фиксированное число, $N=N(\varepsilon)$, $R_0(z)$ - резольвента невозмущенного оператора.

Примером потенциала, удовлетворяющего условию теоремы 1, является функция $\sum_{k=1}^{m}A_m r^{-\alpha_m}(\pi-r)^{-\beta_m}+A_0r^{-2}(\ln|r|+1)^{\alpha}$, $\alpha>1$, $0<\alpha_m<2$, $0<\beta_m<2$, а условию теоремы 2 удовлетворяет та же функция при $A_0=0$.

Литература

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. (1998) Об асимптотике решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка в нормальной форме Лиувилля // Дифференциальные уравнения. Т. 34. № 8. С. 1137-1139.
2. Винокуров В.А., Садовничий В.А. (1998) Асимптотика любого порядка собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. Т. 34. № 10. С. 1423-1426.
3. Ахмерова Э.Ф., Муртазин Х.Х. (2003) Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов // Доклады АН. Т. 388. № 6. С.731-733
4. Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. (2001) Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Математический сборник. Т. 192. № 5. С. 87-124.

[1] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Муртазину Х.Х. за помощь в подготовке тезисов.