Краевая задача Римана с бесконечным индексом.

Спиридонова Нарыйа Руслановна
Аспирант
Якутский государственный университет, Якутск, Россия
e-mail: Nariya@yandex.ru

Краевая задача Римана или задача сопряжения заключается в построении функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ аналитических соответственно в областях $D^+, D^- \subset C$ и непрерывных до их границы $L=\partial D^+=\partial D^-$, на которой выполняется краевое условие

$$\Phi^+(t) = G(t)\cdot\Phi^-(t) + g(t)\,. \qquad (1)$$

Здесь функции $G(t)$, $g(t)$ известные функции, непрерывные по Гельдеру и $G(t)\neq 0, t\in L$. При $g(t)=0$ задача называется однородной, а при $g(t)\neq 0$ – неоднородной.

Однородная краевая задача впервые встречается в работе Римана о дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами. Впервые полное, притом вполне эффективное решение было дано Ф.Д. Гаховым: На первом этапе им отыскивалось мероморфное решение $X^{\pm}(z)$ однородной задачи (задачи факторизации)

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \quad t\in L, \qquad (2)$$

После чего для аналитических функций $\psi^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)/X^{\pm}(z)$ решалась задача о скачке

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = g(t)/X^+(t), \quad t\in L\,.$$

При этом было показано, что разность между числом нулей и полюсов решения $X^{\pm}(z)$ задачи (2) равна, так называемому, индексу функции $G(t)$. Таким образом, индекс $æ = Ind_L G(t)$, определяемый как деленное на 2π приращение $\arg G(t)$ вдоль L, является основной характеристикой задачи.

При классической постановке задача решается при условии, что индекс – определенное конечное число. Отсюда вытекает, что единственно возможной особенностью канонической функции в ее исключительной точке является полюс; следствием этого есть конечность числа линейно независимых решений или условий разрешимости.

При этом возникает вопрос исследования краевой задачи с бесконечным индексом. Таким образом, целью данной работы является исследование краевой задачи Римана с бесконечным индексом.

Задачу (1) называют задачей с бесконечным индексом, если формально $æ = Ind\,G(t) = \pm\infty$. В этом случае поведение канонической функции в окрестности ее исключительной точки аналогично поведению аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Отсюда следует, что множество линейно независимых решений или условий разрешимости описывается здесь уже не многочленом, а целой функцией. Поведение, которой в окрестности ее существенно особой точки весьма многообразно, а это вызывает при исследовании краевой задачи серьезные трудности. Систематическое изучение подобной задачи начинается с работ Н.В. Говорова. Его работы определили основное направление развития теории краевых задач с бесконечным индексом. На первый план здесь вышло построение решения задачи факторизации (2), удовлетворяющего условию $|X^{\pm}(z)| \le M$. Дальнейшее построение идет по классической схеме Ф.Д. Гахова. В.Н. Монахов и Е.В. Семенко предложили другой подход, заключающийся в построении классов корректности задачи (1) за счет задания бесконечного числа условий вида

$$N(G; g; z_m) = 0, \quad m = \overline{1, |æ+1|}, \quad (æ = \pm\infty)$$

с некоторым функционалом $N = \Phi(z_m)$ и некоторой последовательностью $Z = \{z_m\}$.