Обобщенная формула Ито и стохастические интегралы по локальному времени[†]

Гапечкина Екатерина Викторовна

магистр 1 г/о

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет, Естественно-научный факультет, Уфа, Россия

gap_kate@mail.ru

Как известно, формула Ито является основным инструментом стохастического исчисления. Поэтому построение различных ее обобщений является важной задачей теории случайных процессов.

Пусть W_t – винеровский процесс с непрерывными реализациями и совместно непрерывным локальным временем $\alpha(t,u)$, непрерывным по t при п.в. u, $\gamma^*(z,u)=\inf\{s:\alpha(s,u)\ge z\}$ – момент первого попадания на уровень z локального времени $\alpha(s,u)$, $M(p,t)=\max\{W_s : s\in[p,t]\}$, $m(p,t)=\min\{W_s : s\in[p,t]\}$.

Ранее работе Насырова Ф.С. [1] было получено обобщение формулы Ито для класса непрерывных слева предсказуемых функций. Пусть $f(s)$ – произвольная непрерывная слева предсказуемая функция, тогда

$$\int_0^t f(s)dW_s=(E)\int_0^t f(\gamma^*(\alpha(s,W_s),W_s))*dW_s-$$

$$-f(0)[\psi_M(0,t,0)-\psi_m(0,t,0)]-\frac{1}{2}\int_0^t f(s)[\psi_M(ds,t,0)-\psi_m(ds,t,0)],$$

где первый интеграл в правой части есть расширенный симметричный интеграл, $\psi_M(p,t,0)=\beta_M^{(p)}([p,t],0)$, $\psi_m(p,t,0)=\beta_m^{(p)}([p,t],0)$ – локальные времена "отраженных" в нуле функций $W_s-M(p,s)$, $W_s-m(p,s)$, $s\ge p$, соответственно, а последний интеграл в правой части – стохастический интеграл по локальным временам.

Используя понятие стохастического интеграла по локальному времени, введенного Уолшем (см. [2]), удалось получить новый вариант обобщенной формулы Ито:

$$\int_0^t f(s)dW_s=(E)\int_0^t f(\gamma^*(\alpha(s,W_s),W_s))*dW_s+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\int_0^t f(\gamma^*(\alpha(s,u),u))\,\alpha(ds,du),$$

где последний интеграл в правой части есть стохастический интеграл Уолша по локальному времени, а предел понимается как предел по вероятности и доказывается, что он заведомо существует.

Список литературы

1. Насыров Ф. С. (2005) Обобщенная формула Ито и потраекторные итовские интегралы // Вестник УГАТУ. Вып. 6(1). С. 33-40.
2. Walsh J.B. (1983) Stochastic integration with respect to local time: Seminar on stochastic Processes, 1982. – Boston: Birkhauser. – P. 237-302.

[†] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-97909.