Предельные множества последовательностей аналитических функций

Девятков Антон Павлович
студент
Тюменский государственный университет, ИМиКН, Тюмень, Россия
E-mail: anglin@mail.ru

Исходя из нового понятия предельного множества последовательности функций, нами строится вытекающая отсюда теория, важнейшие положения которой мы здесь представим.

Принимая в качестве основного объекта исследований равномерно ограниченные последовательности $\{f_j\}$ аналитических в круге $D:|z|<1$ функций, сформулируем ряд теорем об их предельных множествах $C(A,e^{i\theta})$, определяемых в точке $e^{i\theta}$ относительно того или иного пути (множества) $A\subset D, e^{i\theta}\in\overline{A}$, и представляющих собой совокупность всех частичных пределов всевозможных последовательностей $\{f_j(z_j)\}$, где $\{z_j\}\subset A, \lim\limits_{j\to\infty} z_j=e^{i\theta}$.

Следующие две теоремы относятся к последовательностям однолистных функций.

Теорема 1. Если при п.в. $\theta\in[0,2\pi]$ радиальные предельные множества $C(\gamma_\theta,e^{i\theta})$, $\gamma_\theta=\{re^{i\theta}:0\le r<1\}$ исходной последовательности функций и любой её подпоследовательности совпадают, то такие предельные множества являются вырожденными (т.е. одноточечными) при п.в. $\theta\in[0,2\pi]$.

Теорема 2. Пусть $A_1,A_2\subset D$–ведущие в точку $e^{i\theta}$ два пути, отклонение по Хаусдорфу в гиперболической метрике между которыми конечно. Если последовательность функций $\{f_j\}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ j\to\infty}} d_I f_j(\delta_r)=0$, где $d_I f_j(\delta_r)$–точная верхняя грань диаметров кругов, целиком лежащих в области $f_j(\delta_r)$, $\delta_r=D\cap\{z:|z-e^{i\theta}|<r\}$, то вдоль таких путей справедливо равенство $C(A_1,e^{i\theta})=C(A_2,e^{i\theta})$.

Замечание. Каждое из условий в теоремах 1 и 2 является существенным, что подтверждается соответствующими контрпримерами.

Теорема 3. Пусть в круге задана последовательность непрерывных функций. Если $\{K_\theta\}$–семейство континуумов, получаемых путем поворота на угол θ вокруг начала координат невырожденного континуума $K_0\subset\overline{D}$, имеющего с окружностью $|z|=1$ единственную общую точку $z=1$, то для всех точек $e^{i\theta}$ некоторого остаточного множества на окружности $|z|=1$ справедливо равенство $C(K_\theta,e^{i\theta})=C(D,e^{i\theta})$.

Теорема 4. Заданное в области $D\setminus E$ свойство непрерывной сходимости произвольной последовательности $\{f_j\}$ равномерно ограниченных и аналитических в $D\setminus E$ функций возможно распространить и на все точки компакта $E\subset D$ тогда и только тогда, когда E представляет собой классическое AB-множество.

В качестве ещё одного из результатов теории предельных множеств укажем на следующее дополнение к классической теореме в классификации функций по Бэру, дающее также некоторую дополнительную информацию о природе процесса образования функций 1-ого класса.

Теорема 5. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана равномерно ограниченная последовательность непрерывных функций, сходящаяся в каждой точке $[a,b]$. Тогда для любого непустого замкнутого множества $A\subset[a,b]$ найдётся точка $x_0\in A$, в которой предельное множество $C(A,x_0)$ вырожденно.

Литература

1. Девятков А.П., Кругликов В.И. // ДАН. 2006. Т. 406. №5. С. 591-592.